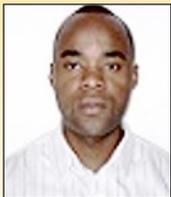


Reinforcement design of concrete sections based on the arc-length method

Dimensionamento de seções de concreto armado baseado no processo do arco cilíndrico



J. N. KABENJABU^a
joelkabenjabu@id.uff.br

M. SCHULZ^a
mschulz@id.uff.br

Abstract

The reinforcement design of concrete cross-sections with the parabola-rectangle diagram is a well-established model. A global limit analysis, considering geometrical and material nonlinear behavior, demands a constitutive relationship that better describes concrete behavior. The Sargin curve from the CEB-FIP model code, which is defined from the modulus of elasticity at the origin and the peak point, represents the descending branch of the stress-strain relationship. This research presents a numerical method for the reinforcement design of concrete cross-sections based on the arc length process. This method is numerically efficient in the descending branch of the Sargin curve, where other processes present convergence problems. The examples discuss the reinforcement design of concrete sections based on the parabola-rectangle diagram and the Sargin curve using the design parameters of the local and global models, respectively.

Keywords: reinforced concrete, design of concrete cross-sections, Sargin curve, arc-length method.

Resumo

O dimensionamento de seções transversais de concreto com o diagrama parábola-retângulo é um modelo de cálculo consagrado. A análise limite global, considerando a não linearidade física e geométrica, demanda uma relação constitutiva que descreva melhor o comportamento do concreto. A curva de Sargin do Código Modelo CEB-FIP, que é definida a partir do módulo de elasticidade na origem e do ponto de pico, representa o ramo descendente da relação tensão-deformação. Esta pesquisa apresenta um método numérico de dimensionamento de seções transversais baseado no processo do arco-cilíndrico. Este método é numericamente eficiente no ramo descendente da curva de Sargin, onde outros processos mostram problemas de convergência. Os exemplos discutem o dimensionamento de seções transversais com o diagrama parábola-retângulo e a curva de Sargin, utilizando os parâmetros de cálculo dos modelos local e global, respectivamente.

Palavras-chave: concreto armado, dimensionamento de seções de concreto, curva de Sargin, processo do arco-cilíndrico.

^a Fluminense Federal University, Department of Civil Engineering, Niterói, RJ, Brazil.

Received: 19 Apr 2017 • Accepted: 12 Jun 2018 • Available Online: 23 Nov 2018

 This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License

1. Introdução

Diferentes relações constitutivas têm sido adotadas no dimensionamento das seções de concreto armado a solicitações normais. Mörsch [1] considerou a aproximação elástica e linear dos materiais e o método das tensões admissíveis. Vários autores participaram do desenvolvimento do modelo de flexão para o dimensionamento no estado limite último. Nos anos 50, a hipótese das seções planas de Bernoulli e as condições de equilíbrio das tensões foram usadas em conjunto com relações constitutivas não lineares do concreto e do aço para resolver o problema da flexão com esforço normal. A revisão bibliográfica sobre a distribuição das tensões no concreto apresentada por Hognestad [2] inclui as contribuições de Whitney [3] e Bittner [4] para os diagramas retangular e parábola-retângulo, respectivamente.

Teorias simplificadas de dimensionamento à flexão e ao esforço normal foram consolidadas no início dos anos 60 utilizando relações constitutivas aproximadas para o concreto, sem perda significativa de precisão. Mattock, Kriz e Hognestad [5] adotaram o diagrama retangular. Rüsç, Grasser e Rao [6] utilizaram o diagrama parábola-retângulo.

Atualmente, o ACI 318-14 [7] adota o diagrama retangular. O CEN Eurocode 2:2004 [8], o FIB Model Code 2010 [9] e a ABNT NBR 6118:2014 [10] utilizam o diagrama parábola-retângulo.

A validade dos diagramas simplificados no dimensionamento das seções transversais é garantida por limitações de norma, tais como as deformações limites do diagrama de domínios. Os diagramas simplificados facilitam a geração de ábacos e simplificam os procedimentos numéricos de dimensionamento, mas não representam diversas características do concreto, tais como o módulo de elasticidade na origem e o ramo descendente da relação tensão-deformação.

A análise limite global de estruturas de concreto, considerando a não linearidade física e geométrica, exige relações tensão-deformação que descrevam melhor o comportamento do concreto. O modelo de Sargin [11] permite considerar diversas características do comportamento uniaxial do concreto. A curva de Sargin apresentada no CEB-FIP Model Code 1990 [12] é definida pelo módulo de elasticidade na origem, pela tensão de compressão mínima e pela deformação correspondente. Esta curva também representa o ramo descendente da relação tensão-deformação.

O presente trabalho apresenta um método numérico de dimensionamento de seções de concreto armado submetidas a solicitações normais utilizando a curva de Sargin. O processo de Newton-Raphson apresenta problemas de convergência nos ramos descendentes das curvas tensão-deformação. O método de dimensionamento proposto é baseado no processo do arco-cilíndrico, que verifica boa convergência quando o módulo de elasticidade tangente é negativo. O método identifica automaticamente a deformada de ruptura sem considerar um limite de deformação variável na compressão (domínio 5). A determinação da capacidade da seção não requer a definição de deformações limites, que são incluídas para evitar deformações excessivas.

Os exemplos de dimensionamento de seções transversais utilizam o diagrama parábola-retângulo e a curva de Sargin. Os diagramas de cálculo são baseados nas curvas características e em recomendações de norma para análises locais e globais.

2. Hipóteses simplificadoras

As seguintes hipóteses são aqui adotadas para a verificação e o dimensionamento de seções de concreto armado:

1. Admite-se que não há escorregamento relativo entre o aço e o concreto, ou seja, as deformações médias do aço e do concreto são consideradas iguais.
2. Adota-se a hipótese de Bernoulli, ou seja, a seção transversal permanece plana após a deformação.

As áreas ocupadas pelo aço não são descontadas na discretização da seção de concreto, no interesse de simplificar a formulação. A influência do tipo de agregado no módulo de elasticidade do concreto não é discutida neste trabalho.

3. Relações constitutivas

As tensões e as deformações de compressão assumem valores negativos.

A relação constitutiva do aço é definida por:

$$\sigma_s = \sigma_s(\epsilon_s) \tag{1}$$

onde a tensão na armadura σ_s é função da deformação axial ϵ_s . A tensão de escoamento e o módulo de elasticidade do aço são f_y e E_s , respectivamente. A deformação associada ao escoamento do aço ϵ_{sy} corresponde a:

$$\epsilon_{sy} = \frac{f_y}{E_s} \tag{2}$$

A curva do aço é dividida em 3 zonas (Figura 1), que são definidas por meio de:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= -f_y + K_s E_s (\epsilon_s + \epsilon_{sy}) && \text{para } \epsilon_s < -\epsilon_{sy} \\ \sigma_s &= E_s \epsilon_s && \text{para } -\epsilon_{sy} < \epsilon_s < \epsilon_{sy} \\ \sigma_s &= f_y + K_s E_s (\epsilon_s - \epsilon_{sy}) && \text{para } \epsilon_s > \epsilon_{sy} \end{aligned} \tag{3}$$

O módulo de elasticidade reduzido $K_s E_s$ promove a convergência do processo de Newton-Raphson no patamar de escoamento. Adota-se $K_s = 0$ no processo do arco-cilíndrico. O módulo de elasticidade tangente $E_s(\epsilon_s)$ do aço é estabelecido pela derivada:

$$E_s(\epsilon_s) = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \epsilon_s} \tag{4}$$

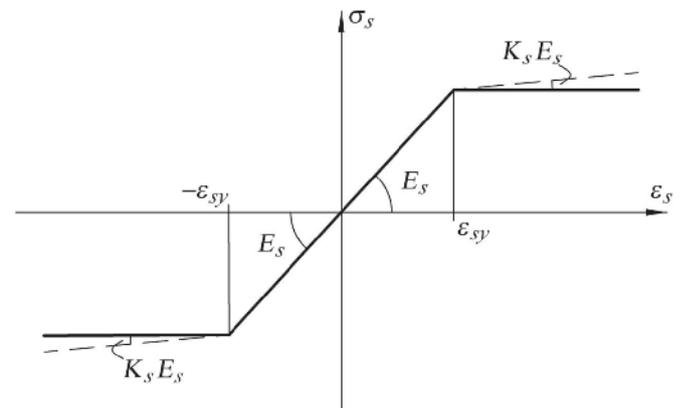


Figura 1 Relação tensão-deformação do aço

As expressões (3) e (4) fornecem:

$$\begin{aligned} E_s(\varepsilon_s) &= K_s E_s \text{ para } \varepsilon_s < -\varepsilon_{sy} \\ E_s(\varepsilon_s) &= E_s \text{ para } -\varepsilon_{sy} < \varepsilon_s < \varepsilon_{sy} \\ E_s(\varepsilon_s) &= K_s E_s \text{ para } \varepsilon_s > \varepsilon_{sy} \end{aligned} \quad (5)$$

A tensão no concreto σ_c é função da deformação no concreto ε_c , i. e.:

$$\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_c) \quad (6)$$

Os parâmetros que definem a curva de Sargin apresentada no CEB-FIP Model Code 1990 [12] são a tensão de compressão mínima σ_{c1} , a deformação crítica ε_{c1} e o módulo de elasticidade inicial E_{c0} (Figura 2). A tensão no concreto é determinada por meio de:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \sigma_{c1} \frac{1}{b\eta^2 + c\eta} \text{ para } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c\lim} \\ \sigma_c &= \sigma_{c1} \frac{k_1\eta - \eta^2}{(k_1 - 2)\eta + 1} \text{ para } \varepsilon_{c\lim} \leq \varepsilon_c \leq 0 \\ \sigma_c &= 0 \text{ para } 0 \leq \varepsilon_c \end{aligned} \quad (7)$$

onde $\varepsilon_{c\lim}$ é a deformação que divide os dois primeiros trechos da curva. O módulo de elasticidade secante E_{c1} no ponto crítico é definido por:

$$E_{c1} = \frac{\sigma_{c1}}{\varepsilon_{c1}} \quad (8)$$

O coeficiente k_1 , a variável η e a deformação limite $\varepsilon_{c\lim}$ correspondem respectivamente a:

$$k_1 = \frac{E_{c0}}{E_{c1}} \quad (9)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (10)$$

$$\varepsilon_{c\lim} = \eta_{\lim} \varepsilon_{c1} \quad (11)$$

onde

$$\eta_{\lim} = k_2 + \sqrt{k_2^2 - \frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{2} + 1 \right) \quad (13)$$

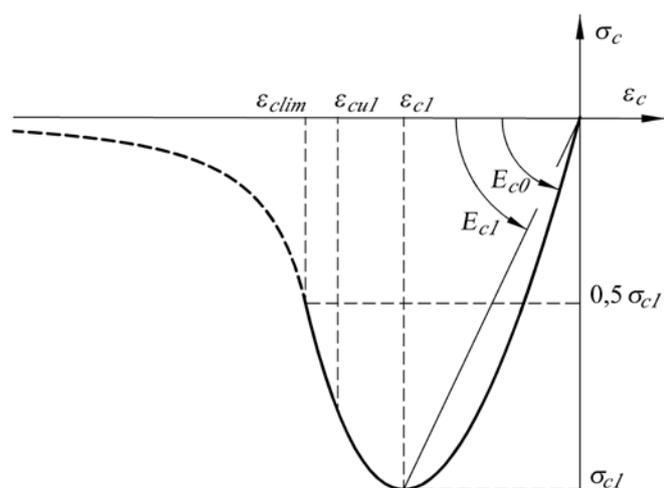


Figura 2
Relação tensão-deformação do concreto

Os parâmetros b e c da equação (7) são respectivamente expressos por:

$$b = \frac{\xi_{\lim}}{\eta_{\lim}} - \frac{2}{\eta_{\lim}^2} \quad (14)$$

$$c = \frac{4}{\eta_{\lim}} - \xi_{\lim} \quad (15)$$

onde

$$\xi_{\lim} = \frac{4[(k_1 - 2)\eta_{\lim}^2 + 2\eta_{\lim} - k_1]}{[(k_1 - 2)\eta_{\lim} + 1]^2} \quad (16)$$

O módulo de elasticidade tangente do concreto $E_c(\varepsilon_c)$ é estabelecido pela derivada:

$$E_c(\varepsilon_c) = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_c} \quad (17)$$

As expressões (7) e (17) fornecem:

$$\begin{aligned} E_c(\varepsilon_c) &= E_{c1} \frac{(c+2b\eta)}{(b\eta^2+c\eta)^2} \text{ para } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c\lim} \\ E_c(\varepsilon_c) &= E_{c1} \frac{[\eta^2(2-k_1)+k_1-2\eta]}{[(k_1-2)\eta+1]^2} \text{ para } \varepsilon_{c\lim} \leq \varepsilon_c \leq 0 \\ E_c(\varepsilon_c) &= 0 \text{ para } 0 \leq \varepsilon_c \end{aligned} \quad (18)$$

O módulo de elasticidade na origem pode ser verificado utilizando (9) e (18), i. e.:

$$E_c(0) = E_{c1} k_1 = E_{c0} \quad (19)$$

Disposições do item 5.8.6 do GEN Eurocode 2:2004 [8] são também consideradas. A deformação associada à tensão crítica e o valor de cálculo do módulo de elasticidade na origem são respectivamente estimados por:

$$\varepsilon_{c1} = -0,7 f_{cm}^{0,31} / 1000 \geq -0,0028 \quad , \quad f_{cm} [\text{MPa}] \quad (20)$$

$$E_{c0} = (1,05) (22000) (f_{cm}/10)^{0,3} / \gamma_{cE} \quad , \quad E_{c0}, f_{cm} [\text{MPa}] \quad (21)$$

O coeficiente de minoração do módulo de elasticidade do concreto é definido por $\gamma_{cE} = 1,2$ e a influência do tipo de agregado não é discutida neste trabalho. A resistência média do concreto é estimada por meio de $f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{MPa}$, onde f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto.

Os coeficientes de minoração das resistências do concreto e do aço adotados são $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$, respectivamente, conforme recomendado pela ABNT NBR 6118:2014 [10]. A redução da resistência do concreto devida aos efeitos de carga de longa duração (Rüsch [13]) é considerada por meio do coeficiente $\alpha_c = 0,85$ na expressão:

$$\sigma_{c1} = -\alpha_c f_{ck} / \gamma_c \quad (22)$$

Os exemplos comparam os resultados de dimensionamento utilizando a curva de Sargin e o diagrama parábola-retângulo. O dimensionamento segundo o diagrama parábola-retângulo considera a relação constitutiva, as deformações limites e os domínios de estado-limite último da seção transversal definidos na ABNT NBR 6118:2014 [10].

O dimensionamento proposto com a curva de Sargin identifica automaticamente a deformada de ruptura. Limites variáveis de

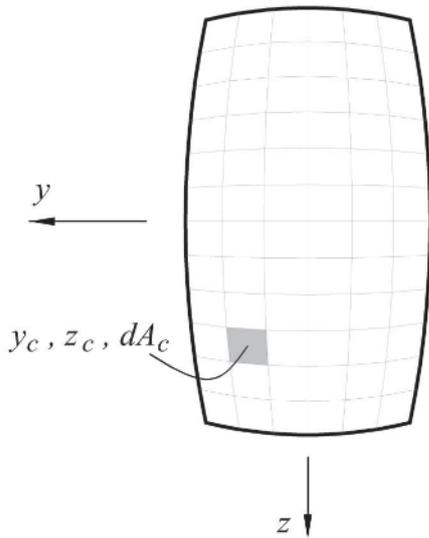


Figura 3
Seção transversal

deformação na compressão (domínio 5) não são necessários. O método não exige a definição de deformações limites, mas estas são estabelecidas para evitar deformações excessivas. A deformação do aço é limitada pela expressão:

$$\epsilon_s \leq 0.010 \tag{23}$$

A deformação do concreto é limitada por:

$$\epsilon_c \geq \epsilon_{cu1} \tag{24}$$

onde, de acordo com o CEN Eurocode 2:2004 [8], adota-se:

$$\epsilon_{cu1} = -0.0028 - 0.027 \left(\frac{98 - f_{cm}}{100} \right)^4 \geq -0.0035, \quad f_{cm} [\text{MPa}] \tag{25}$$

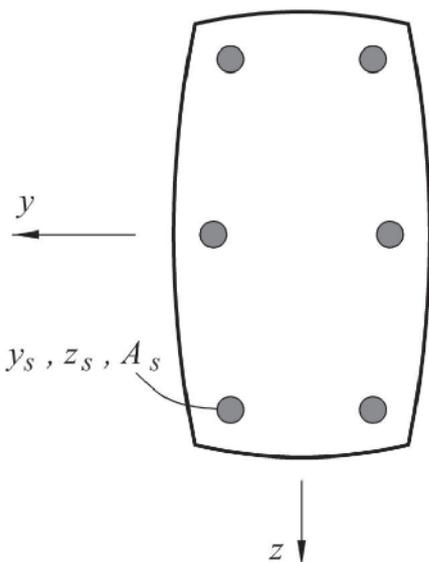


Figura 4
Posição das armaduras

Como $\epsilon_{c_{u1}} > \epsilon_{c_{lim}}$ (Figura 2), o trecho da curva de Sargin definido por $\epsilon_c \leq \epsilon_{c_{lim}}$ não é utilizado para fins de dimensionamento.

4. Equações de compatibilidade e equilíbrio

O sistema de coordenadas e a discretização da seção da seção transversal são apresentados na Figura 3. A seção de concreto é discretizada em pequenos elementos de área dA_c , cujas posições, em relação à origem, são definidas por meio das coordenadas y_c e z_c dos respectivos centroides. A posição de cada barra de aço, cuja área é A_s , é definida pelas coordenadas y_s e z_s (Figura 4). Os esforços solicitantes são apresentados na Figura 5. O esforço normal N_x positivo corresponde a uma solitação de tração. Os momentos fletores M_y e M_z positivos tracionam as faces y e z positivas, respectivamente. Admite-se que não há escorregamento relativo entre o aço e o concreto (hipótese 1). Como as deformações no concreto e no aço, definidas respectivamente por ϵ_c e ϵ_s , são consideradas iguais no mesmo ponto, tem-se:

$$\epsilon_c = \epsilon_s = \epsilon \tag{26}$$

onde ϵ é a deformação de um ponto da seção transversal.

Considera-se hipótese de Bernoulli, ou seja, admite-se que a seção transversal permanece plana após a deformação (hipótese 2). A deformação de um ponto é dada por:

$$\epsilon = k_x + k_y y + k_z z \tag{27}$$

onde k_x é a deformação na origem. Os parâmetros k_y e k_z correspondem às curvaturas, com sinais invertidos. A equação de compatibilidade (27) pode ser escrita da forma:

$$\epsilon = \mathbf{p}^T \mathbf{k} \tag{28}$$

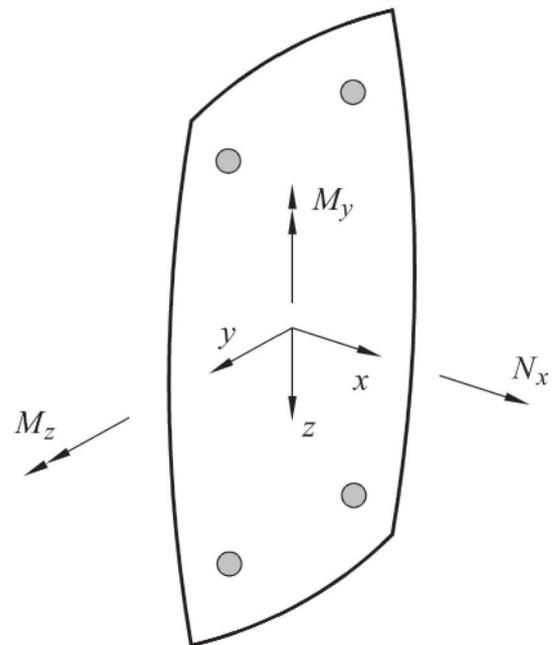


Figura 5
Esforços solicitantes

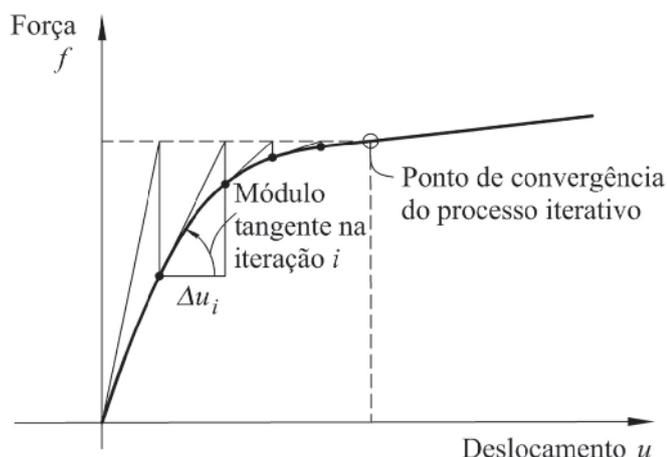


Figura 6
Processo de Newton-Raphson

onde $\mathbf{p} = [1 \text{ y } z]^T$ é o vetor de posição e $\mathbf{k} = [k_x \ k_y \ k_z]^T$ é o vetor das deformações generalizadas.

As seguintes expressões são obtidas considerando as condições de equilíbrio da seção transversal:

$$N_x = \int_A \sigma_c dA_c + \sum \sigma_s A_s \tag{29}$$

$$M_y = \int_A \sigma_c y_c dA_c + \sum \sigma_s y_s A_s \tag{30}$$

$$M_z = \int_A \sigma_c z_c dA_c + \sum \sigma_s z_s A_s \tag{31}$$

As equações de equilíbrio (29), (30) e (31) podem ser definidas na forma matricial:

$$\mathbf{S} = \int_A \mathbf{p} \sigma(\epsilon) dA \tag{32}$$

onde $\sigma(\epsilon)$ é a tensão em um ponto e $\mathbf{S} = [N_x \ M_y \ M_z]^T$ é o vetor dos esforços solicitantes. A seguinte equação incremental é obtida a partir de (32):

$$\Delta \mathbf{S} = \int_A \mathbf{p} \Delta \sigma(\epsilon) dA = \int_A \mathbf{p} E(\epsilon) \Delta \epsilon dA \tag{33}$$

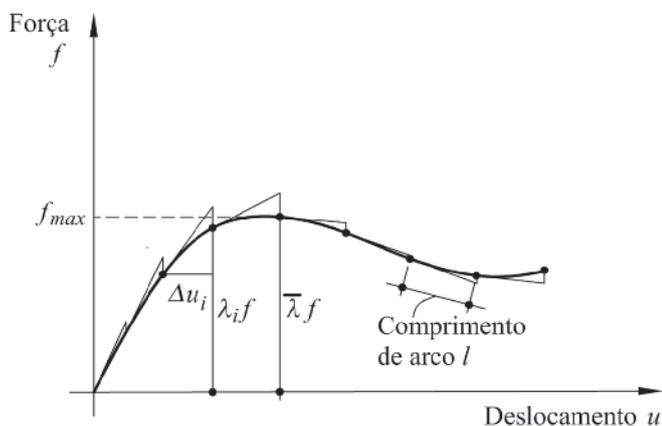


Figura 7
Processo do arco cilíndrico

$E(\epsilon)$ é o modulo de elasticidade tangente do material em um ponto. A substituição de (28) em (33) fornece:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{E} \Delta \mathbf{k} \tag{34}$$

onde a matriz tangente \mathbf{E} é expressa por:

$$\mathbf{E} = \int_A \mathbf{p} E(\epsilon) \mathbf{p}^T dA \tag{35}$$

5. Métodos numéricos de verificação e dimensionamento

A Figura 6 apresenta a solução de um sistema estrutural não linear com um grau de liberdade utilizando o processo de Newton-Raphson. O processo do arco-cilíndrico (Figura 7), também conhecido como método do comprimento de arco, é uma variante do método de Newton-Raphson que limita o avanço do processo iterativo por meio de um comprimento de arco l e de um fator de carga λ . Desta forma, é possível ultrapassar máximos e mínimos locais.

Os métodos de verificação e dimensionamento apresentados não são restritos à curva de Sargin e podem ser utilizados com outras relações constitutivas.

5.1 Processo do arco-cilíndrico

O processo do arco cilíndrico apresentado por Crisfield [14] é uma formulação alternativa do método originalmente proposto por Riks [15].

A solicitação atuante na seção é definida por $\lambda \bar{\mathbf{S}}$, onde o fator λ é um fator de proporcionalidade e $\bar{\mathbf{S}} = [\bar{N}_x \ \bar{M}_y \ \bar{M}_z]^T$ é uma solicitação de referência.

O termo $\Delta \mathbf{S}_i$ é definido por:

$$\Delta \mathbf{S}_i = \lambda \bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}_i \tag{36}$$

onde $\mathbf{S}_i = [N_{x,i} \ M_{y,i} \ M_{z,i}]^T$ é o vetor das solicitações resistentes associadas ao vetor das deformações generalizadas $\mathbf{k}_i = [k_{x,i} \ k_{y,i} \ k_{z,i}]^T$ na iteração i .

A equação (34) é reescrita na forma:

$$\Delta \mathbf{k}_i = \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \mathbf{S}_i \tag{37}$$

onde \mathbf{E}_i é a matriz tangente e $\Delta \mathbf{k}_i$ é o incremento do vetor das deformações generalizadas na iteração i . Utilizando (36) e (37), obtém-se:

$$\Delta \mathbf{k}_i = \lambda \mathbf{E}_i^{-1} \bar{\mathbf{S}} - \mathbf{E}_i^{-1} \mathbf{S}_i = \lambda \bar{\mathbf{g}}_i - \mathbf{g}_i \tag{38}$$

onde

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \mathbf{E}_i^{-1} \bar{\mathbf{S}} \tag{39}$$

$$l^2 = \Delta \mathbf{k}_i^T \Delta \mathbf{k}_i \tag{40}$$

No processo do arco-cilíndrico, o comprimento do arco l é definido pela expressão:

$$l^2 = \Delta \mathbf{k}_i^T \Delta \mathbf{k}_i \tag{41}$$

A substituição de (38) em (41) fornece:

$$l^2 = (\lambda \bar{\mathbf{g}}_i - \mathbf{g}_i^T)(\lambda \bar{\mathbf{g}}_i - \mathbf{g}_i) = \lambda^2 \bar{\mathbf{g}}_i^T \bar{\mathbf{g}}_i - 2\lambda \bar{\mathbf{g}}_i^T \mathbf{g}_i + \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i \tag{42}$$

A expressão (42) define a equação do segundo grau:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{43}$$

onde

$$a = \bar{\mathbf{g}}_i^T \bar{\mathbf{g}}_i ; \quad b = -2\bar{\mathbf{g}}_i^T \mathbf{g}_i ; \quad c = \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i - l^2 \tag{44}$$

Uma das raízes da equação (43) corresponde ao fator λ da próxima iteração. A escolha da raiz a ser adotada é discutida a seguir.

5.2 Verificação da capacidade da seção transversal

Os parâmetros necessários para a verificação da capacidade da seção transversal são as propriedades físicas dos materiais, as características geométricas da seção transversal, a posição e a área de cada armadura, a sollicitação de referência \bar{S} , e o comprimento do arco-cilíndrico I. O fator de proporcionalidade máximo $\bar{\lambda}$ obtido ao longo do processo iterativo define a capacidade da seção transversal. O processo iterativo é dividido nas seguintes etapas:

I. Definição das deformações generalizadas k_i da iteração i

A iteração i inicia com o vetor k_i . Pode-se adotar $k_i = 0$ na primeira iteração.

II. Cálculo das sollicitações S_i e da matriz tangente E_i

As deformações $\epsilon = p^T k_i$, as tensões $\sigma(\epsilon)$ e os módulos de elasticidade tangente $E(\epsilon)$ são calculadas em cada elemento de área de cada material (aço e concreto). As expressões (32) e (35) fornecem os esforços resistentes S_i e a matriz tangente E_i , respectivamente.

III. Determinação dos parâmetros de carga λ_A e λ_B

Os vetores auxiliares $\bar{\mathbf{g}}_i$ e \mathbf{g}_i são obtidos utilizando (39) e (40), respectivamente. Obtêm-se dois fatores de carga λ_A e λ_B através da equação do segundo grau definida por (43) e (44).

IV. Escolha do fator de proporcionalidade da carga λ

Uma das soluções de (43) corresponde ao avanço do processo de carregamento e a outra conduz ao retrocesso. Na primeira iteração, adota-se $\lambda_i = \max(\lambda_A, \lambda_B)$. Na iteração i , onde $i > 1$, os incrementos do vetor das deformações generalizadas Δk_A e Δk_B , respectivamente para as soluções λ_A e λ_B , são obtidos através de (38) e expressos por:

$$\Delta k_A = \lambda_A \bar{\mathbf{g}}_i - \mathbf{g} \tag{45}$$

$$\Delta k_B = \lambda_B \bar{\mathbf{g}}_i - \mathbf{g}_i \tag{46}$$

As declividades θ_A e θ_B das soluções λ_A e λ_B são definidas, respectivamente, por:

$$\theta_A = \Delta k_{i-1}^T \Delta k_A \tag{47}$$

$$\theta_B = \Delta k_{i-1}^T \Delta k_B \tag{48}$$

O fator de proporcionalidade da carga λ que corresponde ao avanço do processo de carregamento é o valor associado à declividade

máxima $\theta = \max(\theta_A, \theta_B)$. O incremento correspondente Δk_A ou Δk_B é valor incremental Δk_i . A seguinte equação fornece o vetor das deformações generalizadas k_{i+1} da próxima iteração:

$$k_{i+1} = k_i + \Delta k_i \tag{49}$$

Retorna-se a etapa II para iniciar uma nova iteração. O processo se encerra quando o concreto ou o aço atinge a respectiva deformação limite. A capacidade da seção é definida por $\bar{\lambda} \bar{S}$, onde $\bar{\lambda}$ é o valor máximo do fator de proporcionalidade encontrado ao longo do processo.

5.3 Dimensionamento da seção transversal

Os parâmetros necessários para o dimensionamento da seção transversal são as propriedades físicas dos materiais, as características geométricas da seção transversal, a posição e a área relativa de cada armadura, as taxas de armadura mínima e máxima, e o comprimento do arco-cilíndrico I. A sollicitação de dimensionamento é definida por $\lambda_d \bar{S}$, onde λ_d é um fator de proporcionalidade e \bar{S} é uma sollicitação de referência.

O processo numérico é dividido nas seguintes etapas:

I. Verificação para a armadura mínima

O fator de carga máximo $\bar{\lambda}_{A_s \min}$ associado à armadura mínima $A_{s \min}$ é obtido por meio do processo descrito no item 5.2. Se $\lambda_d \leq \bar{\lambda}_{A_s \min}$, a solução do problema é $A_{s \min}$ e o processo é encerrado. Em caso contrário, define-se $\lambda_{INF} = \bar{\lambda}_{A_s \min}$ e $A_{s \text{INF}} = A_{s \min}$.

II. Verificação para a armadura máxima

Determina-se o fator de carga máximo $\bar{\lambda}_{A_s \max}$ associado à armadura máxima $A_{s \max}$. Se $\lambda_d > \bar{\lambda}_{A_s \max}$, a seção não é suficiente e o processo é encerrado. Em caso contrário, define-se $\lambda_{SUP} = \bar{\lambda}_{A_s \max}$ e $A_{s \text{SUP}} = A_{s \max}$.

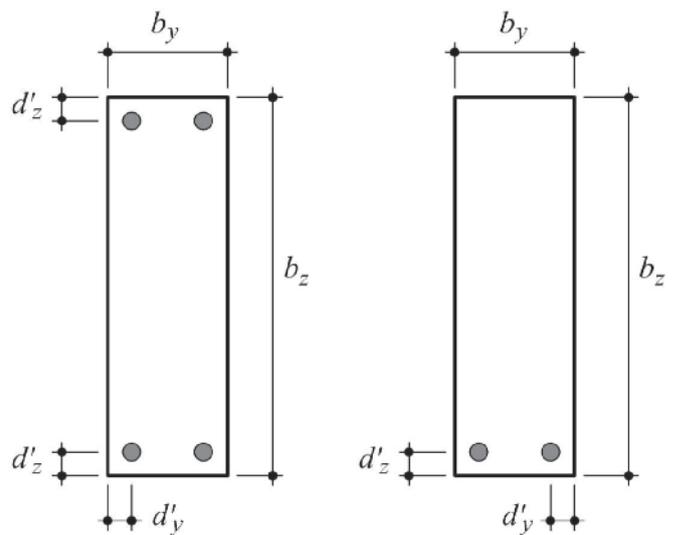


Figura 8 Seções transversais típicas, com e sem armadura de compressão

Tabela 1

Seção com armadura de compressão submetida a compressão simples

	Esforços solicitantes			Diagrama parábola-retângulo			Curva de Sargin			Dif.	Diferença relativa
	N _x (kN)	M _y (kNm)	M _z (kNm)	A _{s tot} (cm ²)	ε _{c min}	ε _{s max}	A _{s tot} (cm ²)	ε _{c min}	ε _{s max}	ΔA _{s tot} (cm ²)	ΔA _{stot} /A _{stot}
C15	-3000	0	0	28,0	-0,00200	-0,00200	27,2	-0,00207	-0,00207	-0,8	-2,9%
	-4000	0	0	51,8	-0,00200	-0,00200	50,2	-0,00207	-0,00207	-1,6	-3,1%
	-5000	0	0	75,6	-0,00200	-0,00200	73,2	-0,00207	-0,00207	-2,4	-3,2%
C30	-4000	0	0	8,5	-0,00200	-0,00200	8,2	-0,00216	-0,00216	-0,3	-3,4%
	-4500	0	0	20,4	-0,00200	-0,00200	19,7	-0,00216	-0,00216	-0,7	-3,4%
	-5000	0	0	32,3	-0,00200	-0,00200	31,2	-0,00216	-0,00216	-1,1	-3,4%
	-5500	0	0	44,2	-0,00200	-0,00200	42,7	-0,00216	-0,00216	-1,5	-3,4%
	-6000	0	0	56,1	-0,00200	-0,00200	54,2	-0,00216	-0,00216	-1,9	-3,4%
	-6500	0	0	68,0	-0,00200	-0,00200	65,7	-0,00216	-0,00216	-2,3	-3,4%
	-7000	0	0	79,9	-0,00200	-0,00200	77,2	-0,00216	-0,00216	-2,7	-3,4%
C45	-6000	0	0	12,7	-0,00200	-0,00200	12,3	-0,00240	-0,00240	-0,4	-3,3%
	-7000	0	0	36,5	-0,00200	-0,00200	35,3	-0,00240	-0,00240	-1,2	-3,3%
	-8000	0	0	60,3	-0,00200	-0,00200	58,3	-0,00240	-0,00240	-2,0	-3,3%

III. Processo iterativo

A armadura necessária é estimada por meio da interpolação linear:

$$A_s = A_{s INF} + (A_{s SUP} - A_{s INF}) \frac{\lambda_d - \lambda_{INF}}{\lambda_{SUP} - \lambda_{INF}} \tag{50}$$

Determina-se o fator de carga máximo $\bar{\lambda}$ para a armadura A_s . Se $\bar{\lambda} > \lambda_d$, $\lambda_{SUP} = \bar{\lambda}$ e $A_{s SUP} = A_s$. Em caso contrário, faz-se $\lambda_{INF} = \bar{\lambda}$ e $A_{s INF} = A_s$.

Inicia-se uma nova iteração enquanto $A_{s SUP} - A_{s INF} > TOL_d$, onde TOL_d é a tolerância do processo de dimensionamento. Quando

a tolerância é satisfeita, o processo é encerrado, adotando $A_{s SUP}$ como resultado, a favor da segurança. Neste trabalho, considera-se $TOL_d = 1 \times 10^{-7} \text{ m}^2$.

6. Exemplos e resultados

O método de dimensionamento com o processo do arco-cilíndrico é implementado por meio de dois programas em Fortran. Os programas Fx4 e Fx5 realizam o dimensionamento com o diagrama parábola-retângulo e a curva de Sargin,

Tabela 2

Seção com armadura de compressão submetida a flexão composta reta ($e_z = b_z/4$)

	Esforços solicitantes			Diagrama parábola-retângulo			Curva de Sargin			Dif.	Diferença relativa
	N _x (kN)	M _y (kNm)	M _z (kNm)	A _{s tot} (cm ²)	ε _{c min}	ε _{s max}	A _{s tot} (cm ²)	ε _{c min}	ε _{s max}	ΔA _{s tot} (cm ²)	ΔA _{stot} /A _{stot}
C15	-1250	0	250	8,3	-0,00350	0,00077	8,4	-0,00295	0,00085	0,1	1,3%
	-1750	0	350	24,4	-0,00350	0,00027	24,3	-0,00284	0,00034	0,0	0,0%
	-2250	0	450	41,7	-0,00350	0,00005	41,6	-0,00275	0,00012	-0,1	-0,2%
	-2750	0	550	59,4	-0,00345	-0,00008	59,2	-0,00270	-0,00001	-0,2	-0,3%
	-3250	0	650	77,3	-0,00339	-0,00016	77,1	-0,00266	-0,00009	-0,2	-0,3%
C30	-2250	0	450	9,7	-0,00350	0,00103	10,7	-0,00318	0,00100	1,0	10,1%
	-2500	0	500	16,6	-0,00350	0,00077	17,7	-0,00318	0,00077	1,1	6,5%
	-2750	0	550	24,2	-0,00350	0,00059	25,3	-0,00317	0,00059	1,1	4,6%
	-3000	0	600	32,1	-0,00350	0,00045	33,2	-0,00315	0,00046	1,1	3,6%
	-3250	0	650	40,3	-0,00350	0,00035	41,5	-0,00313	0,00036	1,2	2,9%
	-3500	0	700	48,7	-0,00350	0,00027	49,9	-0,00311	0,00028	1,2	2,4%
	-3750	0	750	57,2	-0,00350	0,00020	58,4	-0,00309	0,00021	1,2	2,0%
	-4000	0	800	65,9	-0,00351	0,00014	67,0	-0,00308	0,00015	1,2	1,8%
C45	-3250	0	650	11,4	-0,00350	0,00115	13,5	-0,00338	0,00105	2,1	18,2%
	-3500	0	700	17,9	-0,00350	0,00093	20,2	-0,00339	0,00086	2,3	13,0%
	-4000	0	800	32,4	-0,00350	0,00064	35,0	-0,00338	0,00059	2,7	8,2%
	-4500	0	900	48,2	-0,00350	0,00045	51,0	-0,00336	0,00041	2,8	5,9%
	-5000	0	1000	64,6	-0,00350	0,00032	67,6	-0,00334	0,00029	3,0	4,6%

Tabela 3

Seção com armadura de compressão submetida a flexão composta reta ($e_z = b_z/2$)

	Esforços solicitantes			Diagrama parábola-retângulo			Curva de Sargin			Dif.	Diferença relativa
	N_x (kN)	M_y (kNm)	M_z (kNm)	$A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c\ min}$	$\epsilon_{s\ max}$	$A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c\ min}$	$\epsilon_{s\ max}$	$\Delta A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\Delta A_{s\ tot}/A_{s\ tot}$
C15	-750	0	300	8,3	-0,00350	0,00301	8,4	-0,00259	0,00244	0,1	0,7%
	-1000	0	400	16,1	-0,00350	0,00170	15,9	-0,00350	0,00188	-0,3	-1,6%
	-1250	0	500	26,7	-0,00351	0,00126	26,5	-0,00350	0,00140	-0,3	-1,0%
	-1500	0	600	38,0	-0,00350	0,00101	37,8	-0,00344	0,00112	-0,3	-0,7%
	-1750	0	700	49,7	-0,00350	0,00085	49,5	-0,00336	0,00094	-0,2	-0,5%
	-2000	0	800	61,6	-0,00350	0,00075	61,3	-0,00329	0,00081	-0,2	-0,4%
C30	-1000	0	400	7,4	-0,00350	0,00634	7,6	-0,00287	0,00515	0,1	1,9%
	-1250	0	500	11,6	-0,00350	0,00434	11,8	-0,00290	0,00355	0,2	1,9%
	-1500	0	600	16,7	-0,00350	0,00301	17,0	-0,00291	0,00248	0,3	1,9%
	-1750	0	700	22,7	-0,00350	0,00207	23,3	-0,00337	0,00207	0,6	2,7%
	-2000	0	800	32,2	-0,00350	0,00170	32,8	-0,00350	0,00175	0,5	1,7%
	-2250	0	900	42,6	-0,00350	0,00144	43,2	-0,00350	0,00149	0,6	1,5%
	-2500	0	1000	53,4	-0,00351	0,00126	54,1	-0,00351	0,00130	0,7	1,3%
-2750	0	1100	64,6	-0,00350	0,00112	65,4	-0,00350	0,00116	0,7	1,1%	
C45	-1500	0	600	11,1	-0,00350	0,00634	11,4	-0,00312	0,00532	0,3	2,8%
	-2000	0	800	19,8	-0,00350	0,00384	20,3	-0,00312	0,00317	0,6	2,8%
	-2500	0	1000	30,9	-0,00350	0,00235	31,8	-0,00331	0,00207	0,9	2,9%
	-3000	0	1200	48,4	-0,00350	0,00170	50,3	-0,00350	0,00166	1,9	4,0%
	-3500	0	1400	69,2	-0,00350	0,00137	71,4	-0,00351	0,00135	2,2	3,2%

respectivamente. Esses programas são apresentados em Kabenjabu [16].

A seção transversal típica de concreto armado tem as dimensões $b_y = 0,25m$ e $b_z = 0,80m$ (Figura 8). As distâncias entre os centros das armaduras e os bordos da seção nas direções y e z são $d'_y = 0,05m$ e $d'_z = 0,05m$, respectivamente.

A seção de concreto é discretizada em 25x80 elementos de

área. A seção é usualmente analisada com armadura dupla, mas é também verificada sem armadura de compressão na flexão simples.

O valor característico da resistência ao escoamento do aço é $f_{yk} = 500MPa$. Os exemplos são analisados para concretos das classes C15, C30 e C45, que apresentam resistências características iguais a 15 MPa, 30 MPa e 45MPa, respectivamente.

Tabela 4

Seção com armadura de compressão submetida a flexão composta oblíqua ($e_y = b_y/4$ e $e_z = b_z/4$)

	Esforços solicitantes			Diagrama parábola-retângulo			Curva de Sargin			Dif.	Diferença relativa
	N_x (kN)	M_y (kNm)	M_z (kNm)	$A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c\ min}$	$\epsilon_{s\ max}$	$A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c\ min}$	$\epsilon_{s\ max}$	$\Delta A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\Delta A_{s\ tot}/A_{s\ tot}$
C15	-850	53,125	170	9,3	-0,00350	0,00185	8,4	-0,00332	0,00207	-0,8	-9,0%
	-1000	62,500	200	15,2	-0,00350	0,00158	13,9	-0,00350	0,00186	-1,3	-8,6%
	-1250	78,125	250	26,4	-0,00350	0,00131	25,0	-0,00350	0,00152	-1,4	-5,4%
	-1500	93,750	300	38,3	-0,00350	0,00115	36,8	-0,00350	0,00131	-1,4	-3,7%
	-1750	109,375	350	50,5	-0,00350	0,00105	49,1	-0,00350	0,00118	-1,4	-2,7%
	-2000	125,000	400	62,8	-0,00350	0,00098	61,5	-0,00350	0,00109	-1,3	-2,1%
	-2250	140,625	450	75,3	-0,00350	0,00092	74,0	-0,00350	0,00102	-1,3	-1,7%
C30	-1500	93,750	300	11,8	-0,00350	0,00211	11,8	-0,00350	0,00229	0,0	0,2%
	-1750	109,375	350	20,4	-0,00350	0,00180	19,8	-0,00350	0,00193	-0,6	-3,0%
	-2000	125,000	400	30,5	-0,00350	0,00158	29,8	-0,00350	0,00170	-0,7	-2,4%
	-2250	140,625	450	41,4	-0,00350	0,00143	40,6	-0,00350	0,00152	-0,7	-1,8%
	-2500	156,250	500	52,8	-0,00350	0,00131	52,1	-0,00350	0,00140	-0,7	-1,4%
	-2750	171,875	550	64,5	-0,00350	0,00122	63,8	-0,00350	0,00130	-0,7	-1,1%
C45	-2000	125,000	400	11,1	-0,00350	0,00243	11,9	-0,00350	0,00242	0,8	7,3%
	-2250	140,625	450	17,6	-0,00350	0,00211	18,6	-0,00350	0,00210	1,0	5,4%
	-2500	156,250	500	26,0	-0,00350	0,00189	27,1	-0,00350	0,00188	1,2	4,5%
	-2750	171,875	550	35,5	-0,00350	0,00172	36,8	-0,00350	0,00171	1,3	3,7%
	-3000	187,500	600	45,7	-0,00350	0,00158	47,2	-0,00350	0,00158	1,4	3,2%
	-3250	203,125	650	56,5	-0,00350	0,00147	58,1	-0,00350	0,00147	1,6	2,8%
	-3500	218,750	700	67,7	-0,00350	0,00139	69,3	-0,00350	0,00138	1,7	2,5%

Tabela 5

Seção com armadura de compressão submetida a flexão composta oblíqua ($e_y = b_y/2$ e $e_z = b_z/2$)

	Esforços solicitantes			Diagrama parábola-retângulo			Curva de Sargin			Dif.	Diferença relativa
	N_x (kN)	M_y (kNm)	M_z (kNm)	$A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c\ min}$	$\epsilon_{s\ max}$	$A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c\ min}$	$\epsilon_{s\ max}$	$\Delta A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\Delta A_{s\ tot}/A_{s\ tot}$
C15	-400	50	160	10,3	-0,00350	0,00364	9,8	-0,00350	0,00407	-0,5	-4,8%
	-600	75	240	21,2	-0,00350	0,00268	20,6	-0,00350	0,00300	-0,6	-2,7%
	-800	100	320	33,2	-0,00350	0,00216	32,7	-0,00337	0,00232	-0,5	-1,5%
	-1000	125	400	47,6	-0,00350	0,00191	45,6	-0,00350	0,00205	-2,0	-4,3%
	-1200	150	480	63,1	-0,00350	0,00177	61,0	-0,00350	0,00189	-2,1	-3,3%
C30	-600	75	240	11,7	-0,00350	0,00456	11,4	-0,00350	0,00477	-0,2	-2,0%
	-800	100	320	20,7	-0,00350	0,00364	20,4	-0,00350	0,00381	-0,3	-1,4%
	-1000	125	400	31,0	-0,00350	0,00308	30,8	-0,00350	0,00323	-0,3	-0,9%
	-1200	150	480	42,3	-0,00350	0,00268	42,0	-0,00350	0,00281	-0,3	-0,6%
	-1400	175	560	54,1	-0,00350	0,00239	53,9	-0,00350	0,00251	-0,2	-0,4%
-1600	200	640	66,3	-0,00350	0,00216	66,2	-0,00350	0,00226	-0,1	-0,2%	
C45	-600	75	240	7,5	-0,00350	0,00634	7,6	-0,00350	0,00630	0,1	1,8%
	-800	100	320	13,6	-0,00350	0,00500	13,9	-0,00350	0,00498	0,3	1,9%
	-1000	125	400	21,7	-0,00350	0,00419	22,1	-0,00350	0,00417	0,4	1,8%
	-1200	150	480	31,0	-0,00350	0,00364	31,5	-0,00350	0,00363	0,5	1,6%
	-1400	175	560	41,2	-0,00350	0,00324	41,8	-0,00350	0,00323	0,6	1,4%
	-1600	200	640	52,1	-0,00350	0,00293	52,8	-0,00350	0,00292	0,7	1,3%
-1800	225	720	63,5	-0,00350	0,00268	64,2	-0,00350	0,00267	0,8	1,2%	

Tabela 6

Seção com armadura de compressão submetida a flexão composta reta ($e_y = b_y/4$)

	Esforços solicitantes			Diagrama parábola-retângulo			Curva de Sargin			Dif.	Diferença relativa
	N_x (kN)	M_y (kNm)	M_z (kNm)	$A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c\ min}$	$\epsilon_{s\ max}$	$A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c\ min}$	$\epsilon_{s\ max}$	$\Delta A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\Delta A_{s\ tot}/A_{s\ tot}$
C15	-1250	78,125	0	12,2	-0,00350	0,00048	12,3	-0,00286	0,00056	0,1	1,2%
	-1500	93,750	0	22,0	-0,00350	0,00031	22,1	-0,00280	0,00037	0,1	0,3%
	-1750	109,375	0	32,2	-0,00350	0,00021	32,2	-0,00277	0,00027	0,0	0,0%
	-2000	125,000	0	42,5	-0,00350	0,00014	42,4	-0,00275	0,00020	-0,1	-0,1%
	-2250	140,625	0	52,8	-0,00350	0,00010	52,8	-0,00274	0,00015	-0,1	-0,1%
	-2500	156,250	0	63,3	-0,00350	0,00006	63,2	-0,00273	0,00011	-0,1	-0,2%
	-2750	171,875	0	73,7	-0,00350	0,00004	73,6	-0,00272	0,00008	-0,1	-0,2%
C30	-2100	131,250	0	9,7	-0,00350	0,00075	11,0	-0,00304	0,00071	1,3	13,9%
	-2250	140,625	0	15,0	-0,00350	0,00063	16,4	-0,00307	0,00061	1,4	9,3%
	-2500	156,250	0	24,3	-0,00350	0,00048	25,7	-0,00308	0,00048	1,4	5,9%
	-2750	171,875	0	34,1	-0,00350	0,00038	35,5	-0,00308	0,00039	1,4	4,2%
	-3000	187,500	0	44,0	-0,00350	0,00031	45,5	-0,00307	0,00032	1,4	3,3%
	-3250	203,125	0	54,1	-0,00350	0,00025	55,5	-0,00307	0,00026	1,4	2,6%
	-3500	218,750	0	64,3	-0,00350	0,00021	65,8	-0,00306	0,00022	1,4	2,2%
-3750	234,375	0	74,6	-0,00350	0,00017	76,0	-0,00306	0,00019	1,4	1,9%	
C45	-3000	187,500	0	9,6	-0,00350	0,00086	12,4	-0,00323	0,00074	2,8	28,7%
	-3250	203,125	0	18,0	-0,00350	0,00069	21,1	-0,00327	0,00061	3,1	17,0%
	-3500	218,750	0	27,1	-0,00350	0,00057	30,3	-0,00328	0,00051	3,2	11,9%
	-3750	234,375	0	36,5	-0,00350	0,00048	39,8	-0,00329	0,00044	3,4	9,2%
	-4000	250,000	0	46,2	-0,00350	0,00041	49,6	-0,00329	0,00038	3,4	7,4%
	-4250	265,625	0	56,0	-0,00350	0,00036	59,5	-0,00329	0,00032	3,5	6,2%
	-4500	281,250	0	66,0	-0,00350	0,00031	69,6	-0,00329	0,00028	3,5	5,3%
-4750	296,875	0	76,1	-0,00350	0,00027	79,7	-0,00329	0,00025	3,6	4,7%	

Tabela 7

Seção com armadura de compressão submetida a flexão composta reta ($e_y = b_y/2$)

	Esforços solicitantes			Diagrama parábola-retângulo			Curva de Sargin			Dif.	Diferença relativa
	N_x (kN)	M_y (kNm)	M_z (kNm)	$A_{s, tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c, min}$	$\epsilon_{s, max}$	$A_{s, tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c, min}$	$\epsilon_{s, max}$	$\Delta A_{s, tot}$ (cm ²)	$\Delta A_{s, tot} / A_{s, tot}$
C15	-750	93,75	0	12,1	-0,00350	0,00214	12,6	-0,00344	0,00248	0,4	3,4%
	-1000	125,00	0	24,9	-0,00350	0,00148	24,7	-0,00350	0,00161	-0,2	-0,9%
	-1250	156,25	0	39,1	-0,00350	0,00120	38,9	-0,00350	0,00129	-0,2	-0,6%
	-1500	187,50	0	53,8	-0,00350	0,00105	53,6	-0,00339	0,00111	-0,2	-0,5%
	-1750	218,75	0	68,7	-0,00350	0,00095	68,5	-0,00344	0,00101	-0,2	-0,3%
C30	-1000	125,00	0	11,2	-0,00350	0,00471	11,7	-0,00307	0,00399	0,5	4,4%
	-1250	156,25	0	17,1	-0,00350	0,00321	17,9	-0,00350	0,00327	0,8	4,5%
	-1500	187,50	0	24,3	-0,00350	0,00214	25,0	-0,00332	0,00207	0,7	3,1%
	-1750	218,75	0	36,4	-0,00350	0,00172	37,3	-0,00350	0,00175	0,9	2,4%
	-2000	250,00	0	49,8	-0,00350	0,00148	50,7	-0,00350	0,00151	0,9	1,8%
	-2250	281,25	0	63,9	-0,00350	0,00132	64,8	-0,00350	0,00135	1,0	1,5%
C45	-2500	312,50	0	78,2	-0,00350	0,00120	79,2	-0,00350	0,00123	1,0	1,3%
	-1250	156,25	0	11,5	-0,00350	0,00620	12,1	-0,00310	0,00510	0,5	4,4%
	-1500	187,50	0	16,8	-0,00350	0,00471	17,4	-0,00321	0,00397	0,7	4,1%
	-1750	218,75	0	22,6	-0,00350	0,00365	23,4	-0,00340	0,00333	0,9	3,8%
	-2000	250,00	0	28,9	-0,00350	0,00285	29,9	-0,00350	0,00271	1,0	3,5%
	-2250	281,25	0	36,4	-0,00350	0,00214	38,2	-0,00350	0,00205	1,7	4,8%
	-2500	312,50	0	48,2	-0,00350	0,00183	50,7	-0,00350	0,00178	2,4	5,0%
-2750	343,75	0	61,2	-0,00350	0,00163	63,8	-0,00350	0,00159	2,6	4,2%	
-3000	375,00	0	74,7	-0,00350	0,00148	77,5	-0,00350	0,00145	2,8	3,7%	

Tabela 8

Seção com armadura de compressão submetida a flexão simples

	Esforços solicitantes			Diagrama parábola-retângulo			Curva de Sargin			Dif.	Diferença relativa
	N_x (kN)	M_y (kNm)	M_z (kNm)	$A_{s, tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c, min}$	$\epsilon_{s, max}$	$A_{s, tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c, min}$	$\epsilon_{s, max}$	$\Delta A_{s, tot}$ (cm ²)	$\Delta A_{s, tot} / A_{s, tot}$
C15	0	0	150	9,7	-0,00147	0,01000	9,7	-0,00130	0,01001	0,0	-0,1%
	0	0	300	19,7	-0,00189	0,01000	19,7	-0,00177	0,01000	0,0	0,2%
	0	0	450	29,6	-0,00211	0,01001	29,7	-0,00202	0,01001	0,1	0,2%
	0	0	600	39,5	-0,00225	0,01001	39,6	-0,00218	0,01000	0,1	0,2%
	0	0	750	49,4	-0,00235	0,01000	49,5	-0,00229	0,01000	0,1	0,2%
	0	0	900	59,3	-0,00242	0,01000	59,4	-0,00237	0,01001	0,1	0,2%
	0	0	1050	69,2	-0,00247	0,01001	69,3	-0,00242	0,01001	0,1	0,2%
C30	0	0	150	9,6	-0,00109	0,01000	9,6	-0,00100	0,01000	0,0	-0,2%
	0	0	300	19,5	-0,00147	0,01000	19,5	-0,00140	0,01000	0,0	0,0%
	0	0	450	29,4	-0,00172	0,01000	29,4	-0,00166	0,01001	0,0	0,1%
	0	0	600	39,3	-0,00189	0,01000	39,4	-0,00184	0,01001	0,0	0,1%
	0	0	750	49,3	-0,00202	0,01000	49,3	-0,00197	0,01000	0,1	0,1%
	0	0	900	59,2	-0,00211	0,01001	59,2	-0,00208	0,01000	0,1	0,1%
	0	0	1050	69,1	-0,00219	0,01000	69,2	-0,00216	0,01001	0,1	0,1%
C45	0	0	150	9,5	-0,00090	0,01000	9,5	-0,00088	0,01000	0,0	0,0%
	0	0	300	19,3	-0,00124	0,01001	19,3	-0,00123	0,01001	0,0	0,1%
	0	0	450	29,2	-0,00147	0,01000	29,2	-0,00147	0,01001	0,0	0,1%
	0	0	600	39,1	-0,00165	0,01000	39,2	-0,00165	0,01000	0,0	0,1%
	0	0	750	49,1	-0,00178	0,01000	49,1	-0,00178	0,01000	0,0	0,1%
	0	0	900	59,0	-0,00189	0,01000	59,0	-0,00189	0,01001	0,0	0,1%
	0	0	1050	68,9	-0,00198	0,01000	69,0	-0,00198	0,01001	0,0	0,1%

Tabela 9

Seção sem armadura de compressão submetida a flexão simples

	Esforços solicitantes			Diagrama parábola-retângulo			Curva de Sargin			Dif.	Diferença relativa
	N_x (kN)	M_y (kNm)	M_z (kNm)	$A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c\ min}$	$\epsilon_{s\ max}$	$A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\epsilon_{c\ min}$	$\epsilon_{s\ max}$	$\Delta A_{s\ tot}$ (cm ²)	$\Delta A_{s\ tot}/A_{s\ tot}$
C30	0	0	150	4,8	-0,00126	0,01001	4,8	-0,00113	0,01000	0,0	-0,2%
	0	0	300	9,9	-0,00212	0,01000	9,9	-0,00199	0,01000	0,0	0,0%
	0	0	450	15,3	-0,00317	0,01000	15,4	-0,00286	0,00920	0,0	0,2%
	0	0	600	21,4	-0,00350	0,00710	21,5	-0,00286	0,00568	0,1	0,4%
	0	0	750	28,2	-0,00350	0,00449	28,4	-0,00291	0,00366	0,2	0,6%
	0	0	900	36,1	-0,00350	0,00271	36,4	-0,00281	0,00207	0,3	0,8%
	0	0	1050	70,5	-0,00350	0,00135	74,6	-0,00350	0,00131	4,0	5,7%

O estudo inclui o concreto C15, cujo uso é atualmente limitado, em função de sua ampla utilização no passado.

Os coeficientes de minoração das resistências do concreto e do aço são $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$, respectivamente, conforme recomen-

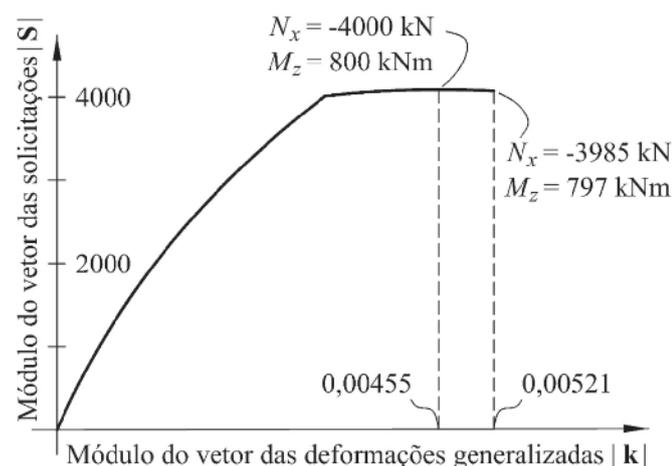


Figura 9

Gráfico de seção sob flexão composta ($e_z = b_z/4$, $f_{ck} = 30$ MPa $\alpha A_{s\ tot} = 67,0$ cm²)

dados pela ABNT NBR 6118:2014 [10]. N_x , M_y e M_z são valores de cálculo dos esforços solicitantes.

Os resultados dos exemplos são apresentados nas Tabelas 1 a 9, onde $A_{s\ tot}$ é a armadura total necessária, $\epsilon_{c\ min}$ é a deformação mínima do concreto e $\epsilon_{s\ max}$ é a deformação máxima das armaduras. A diferença relativa ($\Delta A_{s\ tot}/A_{s\ tot}$) é definida por:

$$\Delta A_{s\ tot}/A_{s\ tot} = (A_{s\ tot, SARGIN} - A_{s\ tot, PAR-RECT})/A_{s\ tot, PAR-RECT} \quad (51)$$

onde $A_{s\ tot, PAR-RET}$ e $A_{s\ tot, SARGIN}$ são as armaduras totais necessárias obtidas com o diagrama parábola-retângulo e a curva de Sargin, respectivamente.

A seção está submetida à compressão simples na Tabela 1. O dimensionamento com a curva de Sargin fornece armaduras inferiores ao diagrama parábola-retângulo. A deformação limite $\epsilon_{cu2} = -0,002$ do diagrama parábola-retângulo na compressão simples é menor, em módulo, que o valor de cálculo da deformação de escoamento do aço ($\epsilon_{syd} = 0,00207$). Entretanto, o aço atinge o valor de cálculo da tensão de escoamento com a curva de Sargin. As diferenças relativas das armaduras necessárias são pequenas e inferiores a 5%.

As Tabelas 2 e 3 consideram a seção submetida à flexão composta reta com excentricidades $e_z = b_z/4$ e $e_z = b_z/2$, respectivamente, onde $e_z = |M_z/N_x|$. A seção está submetida à flexão composta oblíqua com excentricidades $e_y = b_y/4$ e $e_z = b_z/4$ na Tabela 4, onde $e_y = |M_y/N_x|$. A Tabela 5 analisa a flexão composta oblíqua com

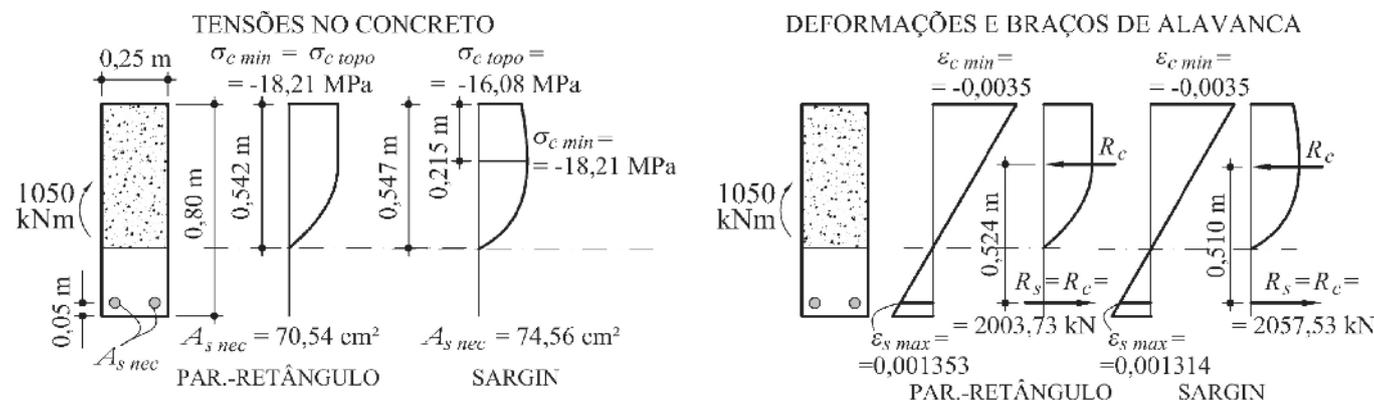


Figura 10

Flexão sem armadura de compressão ($M_z = 1050$ kNm)

excentricidades $e_y = b_y/2$ e $e_z = b_z/2$. As Tabelas 6 e 7 consideram a seção submetida à flexão composta reta com excentricidades $e_y = b_y/4$ e $e_z = b_z/2$, respectivamente. A Tabela 8 analisa a mesma seção, com armadura dupla, submetida à flexão simples.

As diferenças relativas entre os resultados do diagrama parábola-retângulo e da curva de Sargin são sempre inferiores a 5% nas Tabelas 3, 5, 7 e 8.

Os exemplos das Tabelas 2, 4 e 6, que consideram a flexão composta reta e oblíqua com a menor excentricidade, mostram diferenças relativas mais significativas. O concreto C15 apresenta a diferença relativa de -9,0% (Tabela 4). O sinal negativo indica que o diagrama parábola-retângulo é mais conservador. Os concretos C30 e C45 apresentam diferenças relativas de 13,9% e 28,7%, respectivamente (Tabela 6). O sinal positivo indica que a armadura total necessária é maior com a curva de Sargin. Como as diferenças absolutas dos concretos C15, C30 e C45 são pequenas e limitadas a -1,4 cm², 1,4 cm² e 3,6 cm², respectivamente, as diferenças relativas são significativas para pequenas taxas de armadura.

A Tabela 9 investiga o dimensionamento da seção típica sem armadura de compressão submetida a flexão simples, considerando o concreto C30. Esta análise tem especial interesse do ponto de vista numérico, pois demonstra a boa convergência do processo do arco cilíndrico mesmo sem nenhuma contribuição do módulo de elasticidade da armadura de compressão. As diferenças relativas apresentam resultados inferiores a 1% nos primeiros exemplos, quando a armadura de tração atinge o escoamento ($\epsilon_{s\max} \geq 0,00207$). A diferença relativa do último exemplo é 5,7%, onde a armadura não atinge o escoamento. A ABNT NBR 6118:2014 [10] recomenda evitar, nas vigas, as posições de linha neutra no domínio 4 por meio de uma armadura de compressão. A comparação dos resultados do mesmo exemplo com e sem armadura de compressão (Tabelas 8 e 9) mostra que essa recomendação também promove a correspondência de resultados, na flexão simples, entre o diagrama parábola-retângulo e a curva de Sargin. A Figura 9 analisa um exemplo apresentado na Tabela 2, segundo a curva de Sargin ($e_z = b_z/4$, $f_{ck} = 30\text{MPa}$ e $A_{s\text{total}} = 67,0\text{ cm}^2$). O gráfico mostra a variação do módulo do vetor das solicitações $|S|$ em função do módulo do vetor das deformações generalizadas $|k|$. Observa-se que a capacidade máxima da seção é obtida para $|k| = 0,00455$, onde $\epsilon_{c\min} = -0,00308$, $N_x = -4000\text{ kN}$ e $M_z = 800\text{ kNm}$. Entretanto, a ruptura da seção ocorre para $|k| = 0,00521$, onde $\epsilon_{c\min} = -0,0035$, $N_x = -3985\text{ kN}$ e $M_z = 797\text{ kNm}$.

A Figura 10 discute o caso de dimensionamento na flexão simples no domínio 4 sem armadura de compressão (Tabela 9, $M_z = 1050\text{ kNm}$). As posições das resultantes dos blocos comprimidos do diagrama parábola-retângulo e da curva de Sargin são determinadas integrando numericamente as tensões no concreto. As armaduras necessárias utilizando o diagrama parábola-retângulo e a curva de Sargin são $A_{s\text{PAR-RET}} = 70,54\text{ cm}^2$ e $A_{s\text{SARGIN}} = 74,56\text{ cm}^2$, respectivamente. Os valores dos braços de alavanca são $z_{s\text{PAR-RET}} = 0,524\text{ m}$ e $z_{s\text{SARGIN}} = 0,510\text{ m}$, respectivamente. As armaduras não atingem o escoamento em ambos os casos. O diagrama parábola-retângulo e a curva de Sargin fornecem $\sigma_{c\text{topo}} = \sigma_{c\text{min}}$ e $|\sigma_{c\text{topo}}| < |\sigma_{c\text{min}}|$, respectivamente, onde $\sigma_{c\text{topo}}$ é a tensão no topo da seção e $\sigma_{c\text{min}}$ é o valor mínimo da tensão no concreto. As forças resultantes das tensões no concreto e na armadura são

$R_c = R_s = 2003,73\text{ kN}$ e $R_c = R_s = 2057,53\text{ kN}$, respectivamente para o diagrama parábola-retângulo e para a curva de Sargin.

7. Conclusões

O dimensionamento de seções utilizando o diagrama parábola-retângulo é um modelo prático e consagrado. Entretanto, o módulo de elasticidade na origem e o patamar de escoamento do diagrama parábola-retângulo não representam o comportamento do concreto.

A análise limite global de estruturas de concreto considerando a não linearidade física e geométrica exige relações tensão-deformação que descrevem melhor as características do concreto. A curva de Sargin é uma alternativa adotada, pois é definida em função do ponto de pico e do módulo de elasticidade na origem, e representa o ramo descendente da relação tensão-deformação. Este trabalho apresenta um método de dimensionamento de seções de concreto armado que adota o processo do arco-cilíndrico e verifica boa convergência no ramo descendente da curva de Sargin. A solução não requer distribuições de deformações limites que giram em torno do pivô C no domínio 5, mas inclui deformações limites no concreto e no aço para evitar a deformação excessiva. Os exemplos comparam os resultados do diagrama parábola-retângulo e da curva de Sargin utilizando os parâmetros de cálculo adotados no dimensionamento da seção transversal e na análise limite global, respectivamente. O dimensionamento com o diagrama parábola-retângulo adota o modelo de cálculo de seções transversais definido na ABNT NBR 6118:2014 [10]. A curva de Sargin é implementada segundo o modelo não linear para análise limite global apresentado no CEN Eurocode 2:2004 [8].

Os exemplos consideram as resistências características de 15, 30 e 45 MPa. A seção típica retangular de 0,25 m por 0,80 m é submetida a diversos casos de carregamento que incluem a compressão simples e a flexão simples. As excentricidades de 1/4 e 1/2 das dimensões da seção em cada direção são consideradas na flexão composta reta e na flexão composta oblíqua.

As armaduras totais necessárias mostram boa correspondência na compressão simples, na flexão simples com armadura dupla e na flexão composta reta e oblíqua com a maior excentricidade relativa. Os resultados também apresentam boa correspondência na flexão simples sem armadura dupla quando a armadura atinge o escoamento. A comparação de resultados mostra que o uso da armadura de compressão em vigas para evitar a posição da linha neutra no domínio 4 também garante uma boa correspondência entre o diagrama parábola-retângulo e a curva de Sargin.

Diferenças mais significativas são observadas na flexão composta reta e oblíqua com a menor excentricidade relativa. O diagrama parábola-retângulo é mais conservador para concreto C15, que apresenta a diferença relativa de -9,0% entre armaduras totais necessárias (Tabela 4). A curva de Sargin requer maiores armaduras para os concretos C30 e C45, que apresentam diferenças relativas de 13,9% e 28,7%, respectivamente (Tabela 6). As diferenças relativas são maiores para as menores taxas de armadura, pois as diferenças absolutas entre armaduras são limitadas a -1,4 cm², 1,4 cm² e 3,6 cm² para os concretos C15, C30 e C45, respectivamente. Apesar da boa correspondência observada na maioria dos casos analisados, o estudo demonstra que os resultados de dimensiona-

mento com a curva de Sargin não são necessariamente conservadores quando comparados com o diagrama parábola-retângulo. Por este motivo, a análise limite global com a curva de Sargin não dispensa a verificação de todas as seções transversais pelo diagrama parábola-retângulo.

O método de dimensionamento proposto é numericamente eficiente e robusto, e pode ser utilizado com outras relações tensão-deformação que apresentam ramos descendentes. Os exemplos utilizam parâmetros de análise local e global para o diagrama parábola-retângulo e a curva de Sargin, respectivamente. A validação de um único modelo de cálculo, para o dimensionamento da seção transversal e a análise limite global, motiva futuras investigações.

8. Agradecimentos

O primeiro autor agradece à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro. Os autores agradecem às valiosas sugestões do Prof. Benjamin Ernani Diaz.

9. Referências bibliográficas

- [1] MÖRSCH, E. Concrete-steel construction (Der Eisenbetonbau), The Engineering News Publishing Company, New York, 1910, 368 p.
- [2] HOGNESTAD, E. A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members, Bulletin Series no. 399, Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana, 1951, 128 p.
- [3] WHITNEY, C. S. Design of reinforced concrete members under flexure or combined flexure and direct compression, ACI Journal, v. 33, n. 1, 1937, p. 483-498.
- [4] BITTNER, E. Zur Klärung der n-Frage bei Eisenbetonbalken, Beton und Eisen, 1935, v. 34, n.14, p. 226-228.
- [5] MATTOCK, A. H., KRIZ, L. B., AND HOGNESTAD, E. Rectangular concrete stress distribution in ultimate strength design, ACI Journal, 1961, v. 57, n. 2, p. 875-928.
- [6] RÜSCH, H., GRASSER, E., AND RAO, P. S. Principes de calcul du béton armé sous états de contraintes monoaxiaux, Bulletin d'Information n. 36, CEB, Paris, 1962, p. 1-112.
- [7] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Building code requirements for structural concrete - ACI 318-14, Farmington Hills, 2015.
- [8] COMITÉ EUROPÉEN DE NORMALISATION. Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings - EN 1992-1-1, Brussels, 2004.
- [9] FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. FIB Model Code for Concrete Structures 2010, Ernst & Sohn, Berlin, 2013, 402 p.
- [10] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto –Procedimento – ABNT NBR 6118, Rio de Janeiro, 2014.
- [11] SARGIN, M. Stress-strain relationships for concrete and the analysis of structural concrete sections, SM Study n. 4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1971, 167 p.
- [12] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, FÉDÉRATION INTERNATIONALE DE LA PRÉCONTRAÎNTE. CEB-FIP Model Code 1990, Thomas Telford, London, 1993, 437 p.
- [13] RÜSCH, H. Researches toward a general flexural theory of structural concrete. ACI Journal, v. 57, n. 7, 1960, p. 1-28.
- [14] CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”, Computers & Structures, 1981, v. 13, n. 1-3, p. 55-62.
- [15] RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, International Journal of Solids Structures, 1979, v. 15, n. 7, p. 529-551.
- [16] KABENJABU, J. N. Dimensionamento de seções de concreto considerando a curva de Sargin, Niterói, 2017, Dissertação (mestrado) – Pós-Civil, Universidade Federal Fluminense, 196 p.