Volume 11, Number 5 (October 2018) p. 997 – 1024 • ISSN 1983-4195
http://dx.doi.org/10.1590/S1983-41952018000500006

REVISTA IBRACON DE ESTRUTURAS E MATERIAIS
IBRACON STRUCTURES AND MATERIALS JOURNAL

Design of reinforced concrete beams with steel fibers in the ultimate limit state

Verificação de vigas de concreto armado reforçadas com fibras de aço no estado limite último

T. E. T. BUTTIGNOL [a]
butignol@hotmail.com

J. F. FERNANDES [a]
julianaffernandes@gmail.com

T. N. BITTENCOURT [a]
tbitten@usp.br

J. L. A. O. SOUSA [b]
jls@fec.unicamp.br

Abstract

This paper carries out a design analysis of reinforced concrete beams with steel fibers following the fib Model Code 2010 (MC 2010) procedures. The values obtained from the design calculations are compared with the experimental results of reinforced concrete beams with 20kg/m^3 and 60 kg/m^3 of steel fibers submitted to four-point bending tests. In the first part, the procedures for the classification and characterization of the material are explained. The experimental results of three-point bending tests performed on notched steel fiber reinforced concrete (FRC) beams following EN 14651 procedures are described. Moreover, the characterization of the FRC beams according to MC 2010, are carried out. In the second part, the flexural design of reinforced concrete beams with steel fibers, according to MC 2010, is carried out. A sectional analysis is performed in order to obtain the moment-curvature and the force-vertical displacement curves. The theoretical values are compared with the experimental results. Besides, a linear statistic analysis by means of the Rule of Mixture is carried out in order to analyze the variation of the flexural capacity of the reinforced beams with different amounts of steel fibers. The results demonstrated that the design rules described in the MC 2010 are on the safe side. The flexural resistance of concretes with different amounts of fiber incorporation can be determined by the Rule of Mixture, which has shown a high correlation factor (R^2) with the experimental values.

Keywords: fiber reinforced concrete, design procedures, mechanical behavior, constitutive law, rule of mixture.

Resumo

Este artigo faz uma verificação de vigas de concreto armado reforçadas com fibras de aço (CARF) seguindo as recomendações do fib Model Code 2010 (MC 2010). Os modelos de cálculo são comparados com os resultados experimentais de vigas de concreto armado reforçadas com 20 kg/m^3 e 60 kg/m^3 de fibras de aço, submetidas a ensaios de flexão em quatro pontos. Na primeira parte é descrito o procedimento para a classificação e caracterização do material. São apresentados os resultados dos ensaios à flexão em três pontos de vigas entalhadas de concreto reforçado com fibras de acordo com as prescrições da EN 14651. Além disso, é realizada a caracterização das vigas de CRF seguindo as recomendações do MC 2010. Na segunda parte é realizada a verificação à flexão das vigas de CARF seguindo os procedimentos de cálculo recomendados pelo MC 2010. É feita uma análise seccional pelo método das lamelas para a obtenção das curvas momento-curvatura e força-deslocamento vertical. Os resultados são comparados com os valores experimentais. Além disso, é realizada uma análise estatística linear a partir da Regra da Mistura (*Rule of Mixture*) para verificar a variação da resistência à flexão das vigas em função da quantidade de fibras incorporadas no concreto. Os resultados demonstraram que os procedimentos de cálculo descritos no MC 2010 estão a favor da segurança. A determinação da resistência à flexão de concretos com diferentes teores de fibras pode ser obtida a partir da Regra da Mistura, que mostrou um alto grau de correlação R^2 em relação aos valores experimentais.

Palavras-chave: concreto reforçado com fibras; análise estrutural, comportamento mecânico, leis constitutivas, regra da mistura.

[a] *Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, São Paulo, SP, Brasil;*
[b] *Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Campinas, SP, Brasil*

Received: 29 Jun 2017 • Accepted: 10 Jul 2018 • Available Online: 28 Sep 2018

This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License

© 2018 IBRACON

1. Introdução

Nas últimas décadas houve um grande avanço nas pesquisas de materiais cimentícios reforçados com fibras, com destaque para o concreto reforçado com fibras (CRF). As fibras, distribuídas na matriz de cimento, permitiram um grande avanço no comportamento do concreto no regime de pós-fissuração (estádios 1, 2 e 3), contribuindo para a redução e o controle da fissuração, além de um comportamento dúctil. O aumento da ductilidade do concreto ocorre principalmente nas solicitações à tração devido à "costura" das fissuras pelas fibras que criam o efeito de arrancamento (progressiva perda de aderência e escorregamento das fibras), responsável por manter a coesão entre as seções de concreto fissuradas.

O tipo de fibra (metálica ou sintética, micro ou macrofibra, com ou sem ganchos), além da sua quantidade e distribuição na matriz de concreto, são fatores determinantes para o tipo de resposta do material no regime de pós-fissuração, caracterizado por: amolecimento com progressiva perda de resistência devido à localização da fissura, o que garante um comportamento dúctil, proporcionando um colapso progressivo; enrijecimento com aumento da resistência à tração devido ao estado de multifissuração com posterior localização da fissura e falha estrutural.

O controle da formação e propagação das fissuras garante maior durabilidade e resistência ao concreto, além de proporcionar uma diminuição da permeabilidade, reduzindo o ingresso de umidade e agentes agressivos (íons de sulfatos e cloretos), responsáveis pela corrosão da armadura e degradação do concreto. Além disso, devido ao ganho de ductilidade, o CRF possui maior capacidade de absorção de energia (tenacidade) em relação ao concreto convencional, o que permite um melhor desempenho estrutural frente a solicitações estáticas (tração, torção, cisalhamento) e dinâmicas (abalos sísmicos, vibrações, cargas cíclicas).

A adição de fibras ao concreto é responsável pela grande heterogeneidade do material, revelada pelo elevado coeficiente de variação das tensões residuais de tração (LOGFREN et al [1]; LARANJEIRA et al [2]; SOETENS et al [3]; TEIXEIRA BUTTIGNOL et al [4]), que é função principalmente da distribuição e alinhamento aleatórios das fibras na matriz. Além disso, há redução da trabalhabilidade, que está diretamente relacionada com a quantidade de fibras incorporadas na mistura. O desenvolvimento do concreto auto-adensável (CAA) resolveu em grande parte o problema da trabalhabilidade do CRF com elevadas adições de fibras. Além disso, novas técnicas de lançamento permitiram um maior controle da orientação das fibras no concreto, reduzindo a variabilidade e aumentando a previsibilidade dos resultados experimentais.

Devido às suas propriedades, o CRF tem sido amplamente utilizado em pavimentos rígidos e revestimento de túneis (camada primária e secundária) para o controle de fissuração devido à retração, dilatações térmicas e deformações permanentes (plástica e fluência), contribuindo para o aumento da durabilidade da estrutura. No entanto, para fins estruturais, com substituição parcial ou total das armaduras longitudinais (flexão) e transversais (cisalhamento e torção), o CRF apresenta algumas desvantagens, principalmente em relação ao custo dos materiais e à falta de normas e recomendações de projeto. Por um lado, o desenvolvimento de novas fibras (poliméricas, vítreas, de carbono e de aço) e o aumento da utilização do CRF vêm reduzindo o custo de produção e tornando o material mais competitivo no mercado. Por outro lado, normas nacionais e recomendações práticas internacionais vêm sendo publicadas nos últimos anos, contribuindo para um dimensionamento com maior segurança. O conhecimento técnico adquirido nas últimas décadas de pesquisa permitiu a redução dos modelos empíricos e a emergência de novos procedimentos baseados em métodos racionais e físicos.

Um novo paradigma na área foi introduzido com o lançamento do novo fib Model Code 2010 [5] (MC 2010), que adicionou dois novos capítulos referentes ao CRF, que incluem uma proposta de classificação, recomendações para a caracterização à tração, modelos constitutivos simplificados e regras de dimensionamento à flexão, cisalhamento e torção. O MC 2010 tem sido a base para o desenvolvimento de códigos nacionais voltados para o dimensionamento de CRF. Por exemplo, no Brasil se encontra à disposição uma recomendação sobre aplicação estrutural do concreto com fibras, produzida pelo CT-303 [6] (Comitê IBRACON/ABECE sobre o uso de materiais não convencionais para estruturas de concreto) e baseada nos requisitos de projeto do MC 2010.

2. Justificativa

A crescente utilização do concreto reforçado com fibras para fins estruturais se justifica pelo seu melhor desempenho estrutural, maior durabilidade e pela simplificação dos processos executivos (redução ou eliminação da armadura de flexão e cisalhamento). Para a sua utilização por parte de projetistas, são necessários modelos de cálculo confiáveis, com grande capacidade de previsão da resposta estrutural. Dada a variabilidade do comportamento do material devido à sua heterogeneidade, é necessária uma análise rigorosa das propriedades mecânicas do CRF antes da execução da obra, que deve incluir ensaios experimentais para a caracterização do material e a definição do modelo constitutivo mais apropriado para o dimensionamento da estrutura.

O cálculo estrutural envolve a utilização de modelos simplificados descritos em normas nacionais e internacionais, além de modelos numéricos desenvolvidos, por exemplo, em programas de elementos finitos ou baseados em análise seccional (método das lamelas). Em obras de grande porte (pontes, viadutos, edifícios altos, estruturas offshore, etc.), também se faz necessário uma investigação experimental através de ensaios com modelos reduzidos de forma a verificar a confiabilidade das regras de cálculo adotadas.

A falta de normas sobre o assunto é um impeditivo para o avanço da utilização do CRF para fins estruturais. Dessa forma, este artigo tem como objetivo contribuir para o aumento do conhecimento sobre as especificações de projeto e os modelos de dimensionamento de concretos reforçados com fibras, a partir da verificação à flexão, no Estado Limite Último (ELU), de vigas de concreto armado reforçadas com fibras (CARF). O tema é relevante tendo em vista o lançamento das recomendações da ABECE sobre o uso de materiais não convencionais para estruturas de concreto.

Na primeira parte do artigo são descritos os resultados dos ensaios em laboratório. Foram executados ensaios à flexão em três pontos com vigas de CRF entalhadas, de acordo com o EN 14651 [7]. Os dados experimentais foram utilizados para a classificação e caracterização do material seguindo as recomendações do MC 2010. Também são apresentados os resultados de ensaios à flexão em quatro pontos de vigas de concreto armado reforçadas com fibras. Estes ensaios fazem parte de uma ampla campanha experimental realizada no Hall Tecnológico da Escola Politécnica da USP no âmbito do projeto de cooperação técnico cientifico com Furnas Centrais Elétricas. Na segunda parte, é feita a verificação estrutural das vigas de CARF, seguindo as recomendações do MC 2010 e utilizando os modelos constitutivos obtidos a partir da caracterização do material. Também é realizado um comparativo entre os valores experimentais das vigas de CARF e os resultados obtidos a partir de análise seccional (método das lamelas). Por último, é discutida a eficácia da regra da mistura para prever a capacidade resistente à flexão do CRF com diferentes teores de fibras.

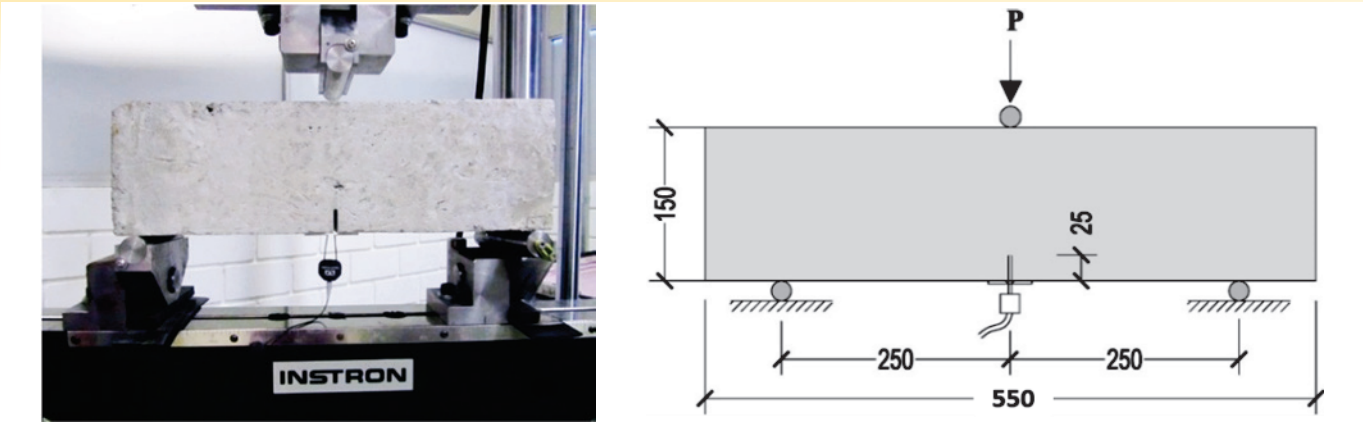

Figura 1
Ensaio à flexão em três pontos (EN 14651 [7]), medidas em mm

3. Caracterização mecânica do material

O objetivo principal da caracterização do material é a determinação da curva à tração residual que está diretamente relacionada com a resposta estrutural (amolecimento ou enrijecimento). O ensaio à tração uniaxial é pouco utilizado devido à dificuldade de execução do procedimento experimental que necessita de dispositivos especiais para garantir a correta fixação do espécime à prensa e de um rigoroso controle do processo para que haja um perfeito alinhamento do corpo-de-prova de modo a evitar a formação de esforços adicionais de flexão. Além disso, os resultados são influenciados pelas condições de contorno impostas (apoios rígidos ou rotulados) (VAN MIER [8]). Já o ensaio à tração por compressão diametral (Brazilian test) não fornece nenhuma informação sobre o comportamento do CRF no regime de pós-fissuração. O experimento permite a obtenção somente da resistência à tração do material. Dessa forma, a caracterização do CRF é geralmente realizada por meio de ensaios padronizados à flexão em três (EN 14651 [7]) ou quatro pontos (UNI 11039 [9]) utilizando vigas prismáticas entalhadas.

O ponto negativo da utilização dos ensaios à flexão é a necessidade de realização de análise inversa para a obtenção da curva à tração do CRF. Diversos autores propuseram modelos de cálculo simplificados, por exemplo: QIAN e LI [10]; MOBASHER et al [11]; SOUSA e GETTU [12]; AMIN et al [13]. Cabe mencionar que o modelo de SOUSA e GETTU (2006) foi incorporado a um programa escrito em linguagem Java com interface gráfica denominado fitFG (SANTOS et al [14]) que determina a curva característica do concreto reforçado com fibras à tração a partir de análise inversa, utilizando resultados de ensaios à flexão em três pontos. Os dados de entrada (resultados à flexão) podem ser inseridos em termos de força *versus* deslocamento vertical (P-Δ) ou força *versus* abertura de fissuras (P-CMOD). O programa permite a escolha de três tipos de curvas à tração: Hordjik (exponencial) para concreto simples e modelos bilineares e trilineares para concretos simples ou com fibras.

O problema de todos esses modelos é a necessidade de análise computacional para a sua solução. O MC 2010 introduziu um modelo simplificado que evita a adoção de complexos modelos matemáticos iterativos, no qual a solução pode ser obtida de forma direta a partir da classificação do material, como descrito no subitem 3.2.

A caracterização do CRF é importante para a determinação das propriedades mecânicas, especialmente à tração, de modo a garantir maior confiabilidade das análises de projeto. É importante ressaltar que o CRF é um material com elevada heterogeneidade que resulta em valores de resistência característicos, usados para a classificação do material, menores em comparação aos do concreto simples devido ao maior desvio padrão da amostra. De acordo com LARANJEIRA et al [2], um coeficiente de variação (CV) superior a 20% em concretos reforçados com fibras é normalmente observado em ensaios à flexão. CARMONA et al [15], em ensaios do tipo Barcelona, encontrou valores de até 30% para o CV na fase de pós-fissuração. Ensaios experimentais à flexão em três pontos conduzidos por SOETENS et al [3] resultaram em um CV para o f_{R1} (SLS, CMOD=0.5 mm) e o f_{R3} (ULS, CMOD=2.5 mm) variável entre 10% e 33%.

A heterogeneidade do CRF está relacionada principalmente com a quantidade, distribuição e orientação das fibras no interior da massa de concreto, além do tipo e das propriedades da fibra utilizada. Dessa forma, é recomendável que os ensaios sejam realizados utilizando corpos-de-prova preparados (mistura, lançamento e cura) de forma mais próxima possível à da sua execução em obra. Isto permite uma avaliação mais criteriosa e realista do efeito da orientação e distribuição das fibras nas propriedades mecânicas do concreto.

3.1 Ensaios à flexão em três pontos

A caracterização do CRF foi realizada por meio de ensaios à flexão em três pontos em vigas entalhadas seguindo as prescrições da EN 14651 [7], como mostrado na Figura 1. Os ensaios foram realizados no Hall Tecnológico da USP utilizando a Máquina Universal de Ensaios Instron 8802, estática e dinâmica, servo hidráulica com controle de deformação e capacidade de 250 kN. O ensaio foi controlado através do transdutor externo de deslocamento de abertura de fissura

Tabela 1
Traço do concreto

Material	Quantidade (Kg/m³)
Cimento	404
Agregados graúdos (2,36 – 12,7 mm)	864
Areia de quartz	569
Areia artificial	410
Água	182
Polifuncional	2.45
Hiperplastificante	4.55
Massa total	2436

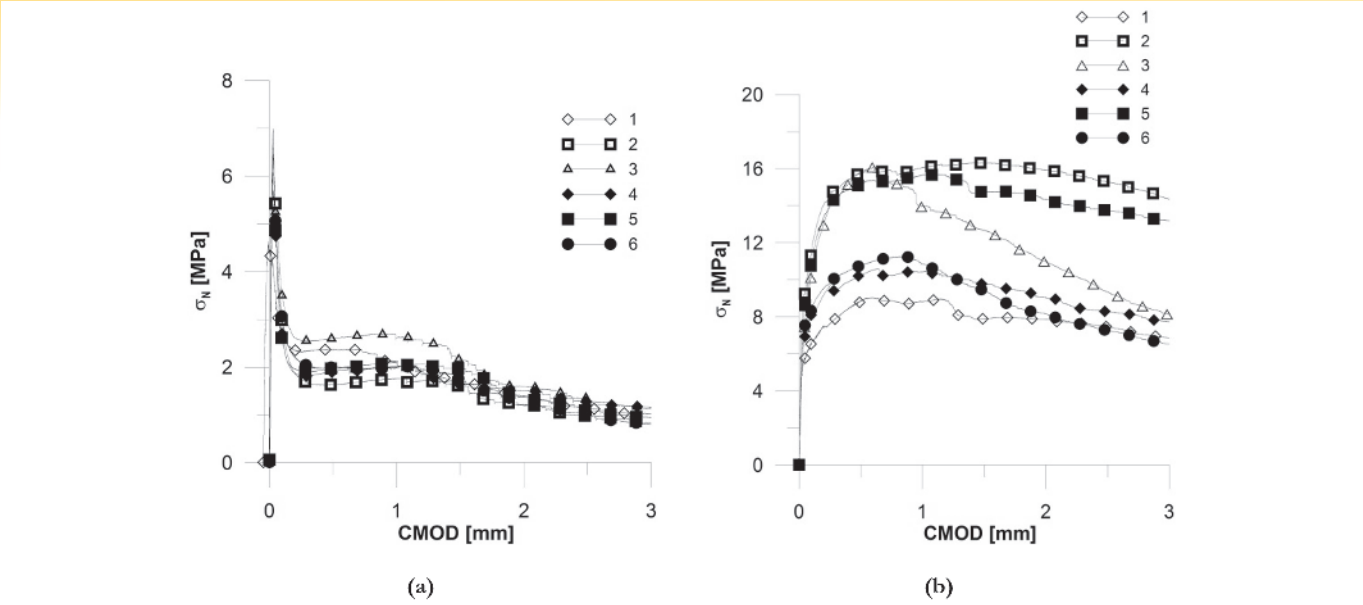

Figura 2
Resultados dos ensaios à flexão em três pontos de acordo com o EN 14651 [7]: a) espécimes com 20 kg/m³ de fibras; b) espécimes com 60 kg/m³ de fibras

(*Crack Opening Displacement (COD) gauge*) para obtenção da abertura da fissura (CMOD – "Crack Mouth Opening Displacement.

Foram executados 6 ensaios em vigas prismáticas (150x150x550mm) reforçadas com 20 kg/m³ de fibras de aço (F20) e 6 ensaios em espécimes com 60 kg/m³ de fibras de aço (F60). O traço do concreto utilizado é apresentado na Tabela 1.

Os resultados dos ensaios, em termos de tensão nominal ($\sigma_N = M/W$) versus abertura de fissuras (CMOD), são mostrados na Figura 2.

A Tabela 2 apresenta os valores das tensões de tração residuais para diferentes aberturas de fissuras, que foram obtidos a partir dos ensaios experimentais (Figura 2). Os valores das tensões residuais f_{LOP}, f_{R1}, f_{R2}, f_{R3} and f_{R4} são mostrados na Figura 3.

A partir dos resultados, pode-se observar a elevada variabilidade dos resultados, especialmente as tensões resíduas que demonstram um aumento crescente do coeficiente de variação (CV) à medida que a abertura de fissuras aumenta. Os resultados do CV estão dentro do intervalo encontrado por LARANJEIRA et al [2].

3.2 Valores característicos

Os valores característicos mostrados na Tabela 3 foram calculados a partir dos valores da Tabela 2 e de acordo com o EUROCODE 1 [16], como descrito na Equação 1, em que: X_m é o valor da tensão média; V_x é o coeficiente de variação.

O coeficiente de variação é calculado de acordo com a Equação 2, em que: σ_x é o desvio padrão da amostra; K_m é o parâmetro que depende do número de espécimes testadas e do valor de V_x previamente conhecimento. No caso analisado, o coeficiente de variação é definido como não conhecido, uma vez que não há informações anteriores ao ensaio sobre este material.

$$X_k = X_m \cdot (1 - K_m \cdot V_x) \quad (1)$$

Os valores característicos dos ensaios à flexão em três pontos ($f_{LOP,k}$, $f_{R1,k}$, $f_{R3,k}$), obtidos a partir da Tabela 2, são mostrados na Tabela 3.

3.3 Classificação e caracterização do material

A classificação e caracterização (modelo constitutivo à tração) do CRF é descrita no capítulo 5 do MC 2010.

A determinação da classe do material é feita a partir de dois pontos distintos da curva σ_N-CMOD que se referem ao Estado Limite de Serviço

Tabela 2
Resultados dos ensaios à flexão em três pontos (em MPa) e coeficiente de variação (CV)

C_f (kg/m³)	Tensão residual	Amostras						Média (X_m)	CV (%)
		1	2	3	4	5	6		
20	f_{LOP}	4,63	6,51	6,88	6,98	6,62	5,70	6,22	14,47
	f_{R1}	2,36	1,63	2,60	1,91	1,97	1,99	2,08	16,67
	f_{R2}	1,66	1,61	2,16	1,64	1,97	1,76	1,80	12,17
	f_{R3}	1,14	0,99	1,35	1,27	1,09	1,02	1,14	12,27
	f_{R4}	0,93	0,77	1,00	0,90	0,89	0,64	0,86	15,07
60	f_{LOP}	5,80	9,45	7,87	7,05	8,81	7,63	7,77	16,61
	f_{R1}	8,87	15,75	15,76	10,26	15,19	10,78	12,77	24,56
	f_{R2}	7,91	16,30	12,68	9,79	14,76	9,42	11,81	27,99
	f_{R3}	7,48	15,30	9,35	8,30	13,75	7,26	10,24	33,53
	f_{R4}	6,27	13,43	7,30	7,32	12,73	5,74	8,80	38,37

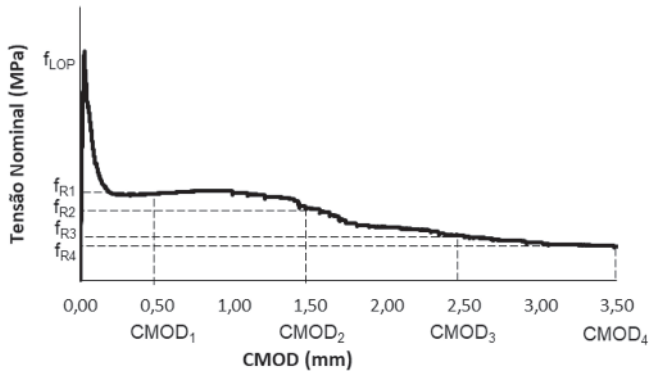

Figura 3
Valores experimentais das tensões residuais: f_{LOP}, f_{R1}, f_{R2}, f_{R3} e f_{R4}

(ELS; w = 0,5 mm; $f_{r1,k}$) e Estado Limite Último (ELU; w = 2,5 mm; $f_{r3,k}$), como mostra a Figura 4a. A classe de resistência à tração do concreto é definida por um valor numérico situado entre 1 MPa e 8 MPa, obtido a partir do valor característico de f_{r1k}, seguida de uma letra do alfabeto romano, de "a" a "e". A letra determina o comportamento do CRF na fase de pós-fissuração (enrijecimento ou amolecimento) que é obtido a partir da relação f_{r3k}/f_{r1k}, como mostra a Tabela 4.

O MC 2010 determina um valor mínimo de 0,5 para a relação f_{r3k}/f_{r1k}; para valores menores, deve-se proceder à redução de f_{r1k}. Além disso, para garantir um mínimo de ductilidade ao material, o MC 2010 introduziu um limite para a sua utilização com fins estruturais, em que: $f_{R1,k}/f_{Lk} \geq 0,4$.

A classificação dos materiais, respectivamente com 20 kg/m³ (F20) e 60 kg/m³ (F60) de fibras, é apresentada na Tabela 5. A classe dos materiais foi determinada a partir da Tabela 4 utilizando os valores mostrados na Tabela 3.

O modelo constitutivo à tração (curva linear tensão *versus* abertura de fissuras), mostrado na Figura 4b é calculado a partir da classe do material (Tabela 5) de acordo com as Equações 3 e 4, em que:

Tabela 3
Valores característicos dos ensaios à flexão em três pontos

Quantidade de fibras	$f_{LOP,k}$ (MPa)	$f_{R1,k}$ (MPa)	$f_{R3,k}$ (MPa)
20 kg/m³	4,26	1,32	0,84
60 kg/m³	4,95	5,93	2,75

Tabela 4
Classificação proposta pelo MC 2010

Classe	f_{r3k}/f_{r1k}	Comportamento
A	0,5	Amolecimento
B	0,7	
C	0,9	
D	1,1	Enrijecimento
E	1,3	

Tabela 5
Classe dos materiais

Tipo	Classe
F20	1b
F60	5a

w é o valor da abertura da fissura; f_{Fts} é o valor da resistência à tração residual (pós-pico) inicial para uma abertura de fissura igual a 0 mm (ELS; w = 0 mm); f_{Ftu} é o valor da resistência à tração residual no estado limite último, como mostrado na Figura 4b. Para um limite de abertura de fissura igual a 2,5 mm (ULS; w = 2,5 mm), f_{Ftu} pode ser calculado a partir da Equação 5.

$$f_{Fts} = 0,45\, f_{r1,k} \quad (w = 0) \tag{3}$$

$$f_{Ftu} = f_{Fts} - \frac{w_u}{CMOD_3} \cdot \left(f_{Fts} - 0,5 \cdot f_{r3,k} + 0,2 \cdot f_{r1,k}\right) \geq 0 \tag{4}$$

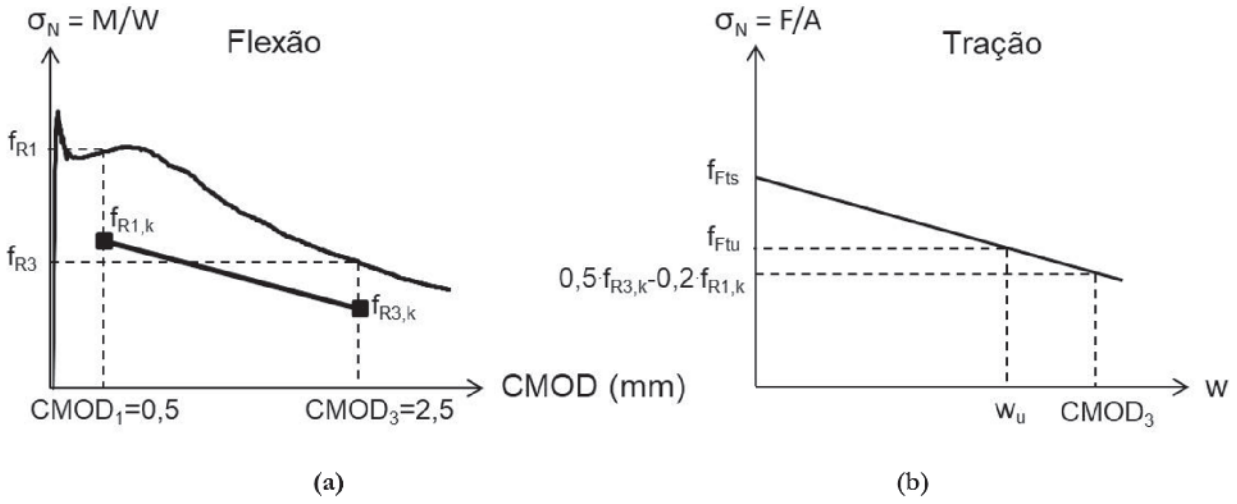

Figura 4
Tensões residuais do CRF: a) curva à flexão; b) curva linear à tração

Tabela 6
Tensões residuais à flexão e à tração do CRF (em MPa)

Viga		F20	F60
Classe		1b	5a
Flexão	$f_{r1,k}$	1	5
	$f_{r3,k}$	0,7	2,5
Tração	f_{FTS}	0,45	2,25
	f_{Ftu}	0,15	0,25

$$f_{Ftu} = 0{,}50\, f_{r3,k} - 0{,}2\, f_{r1,k} \quad (w = 2{,}50) \qquad (5)$$

Para o caso analisado, as tensões residuais à flexão ($f_{r1,k}$ e $f_{r3,k}$) e à tração (f_{FTS} e f_{Ftu}) obtidas a partir da classe do material são mostradas na Tabela 6.

4. Ensaios experimentais

4.1 Procedimento experimental

As vigas prismáticas sem entalhe (estruturais) foram submetidas a ensaios de flexão em quatro pontos de acordo com o arranjo de ensaio mostrado na Figura 5.
Foram utilizadas vigas de concreto armado reforçadas com fibras de aço (20 kg/m³ e 60 kg/m³) com comprimento de 2,2 m e seção transversal de 125mm x 250mm.
A armadura longitudinal superior (negativa) é formada por duas barras de aço de 6,3 mm de diâmetro e a armadura positiva é constituída por duas barras de 16 mm. A armadura transversal é composta por estribos de 8,0 mm de diâmetro espaçados a cada 8 cm no trecho entre os apoios e os pontos de aplicação de carga. No tramo central (entre os dois pontos de aplicação de carga),

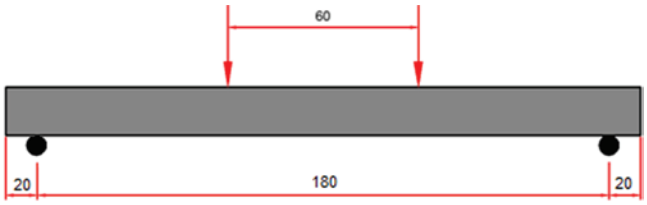

Figure 5
Arranjo de ensaio de vigas submetidas à flexão em quatro pontos (medidas em cm)

foram colocados 2 estribos com espaçamento de 20 cm. A Figura 6 mostra o detalhamento da armadura das vigas.
Para os ensaios, foi utilizado um servo-atuador estático com capacidade de 800 kN, da marca Brasválvula, com célula de carga com capacidade de 1000 kN (Figura 7).
Para a leitura dos deslocamentos, foram utilizados LVDTs com curso de 100 mm da marca HBM. Os aparelhos foram fixados no meio do vão da viga com o auxílio de suportes metálicos ("Yokes"), como mostra a Figura 6.

4.2 Resultados experimentais

Os resultados experimentais, em termos de força (F) *versus* deslocamento vertical (δ), para as vigas de concreto armado com e sem fibras são apresentados na Figura 8.
A comparação dos resultados demonstra que a incorporação de fibras levou a um aumento da capacidade portante das vigas em aproximadamente 15%. Além disso, houve um pequeno ganho de ductilidade, com um aumento do deslocamento vertical (flecha).
Em todos os casos, houve ruptura dúctil devido ao esmagamento do concreto na zona comprimida e escoamento da armadura na região tracionada.

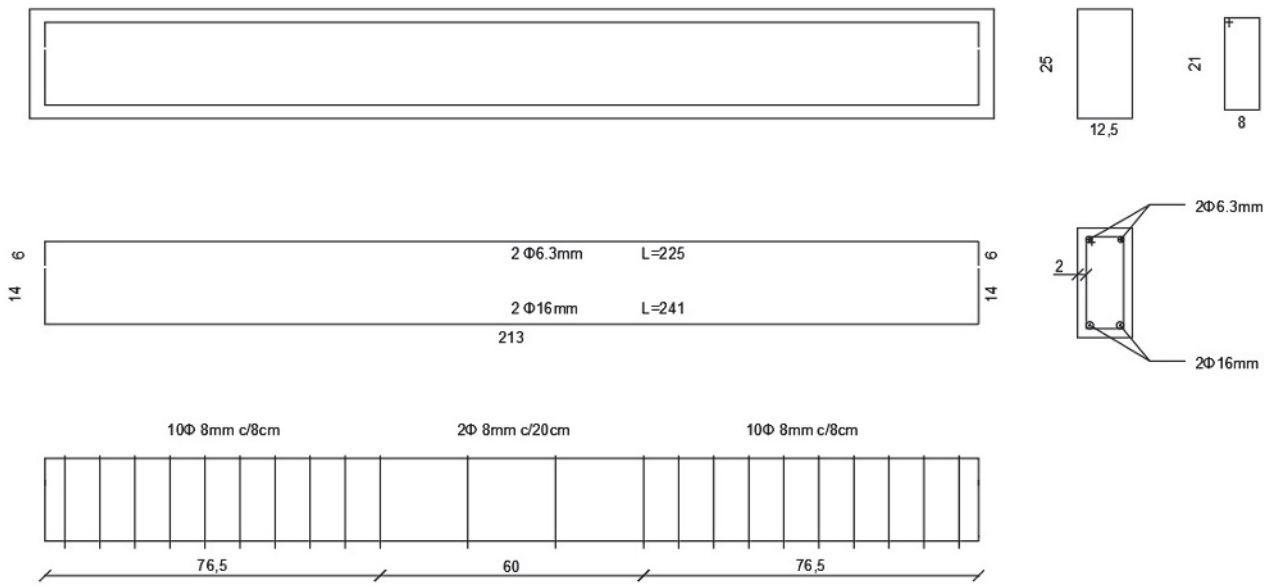

Figura 6
Detalhamento da armadura das vigas de concreto armado com e sem fibras

Figura 7
Pórtico para o ensaio à flexão em quatro pontos

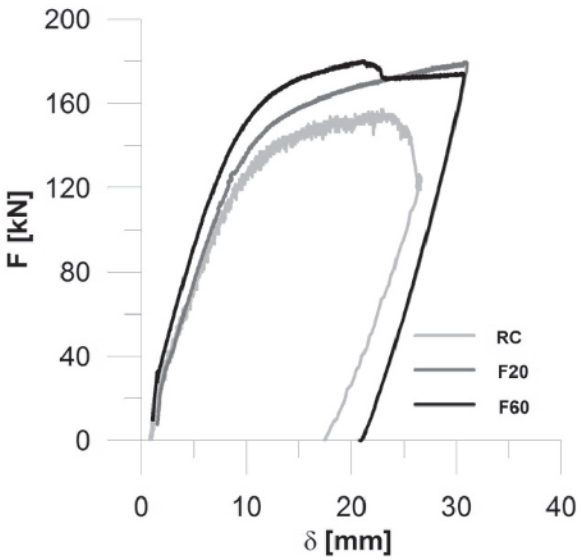

Figura 8
Resultados dos ensaios à flexão em quatro pontos para vigas de CA e CARF

5. Verificação das vigas à flexão

A verificação à flexão no ELU é realizada seguindo as recomendações do MC 2010. Também são apresentados os resultados de uma análise seccional a partir do método das lamelas para a comparação das curvas teóricas e experimentais à flexão. Foram utilizados os modelos constitutivos à tração do concreto (Figura 4) obtidos a partir da caracterização do material.

5.1 Hipóteses de cálculo

As hipóteses de cálculo do CRF são as mesmas adotadas para o concreto armado (CA): seções planas permanecem planas após a deformação (Lei de Bernoulli), pequenos deslocamentos, aderência perfeita entre o concreto e o aço, modelos constitutivos idealizados para o concreto e o aço. A diferença principal é que no dimensionamento de vigas de concreto armado, as tensões de tração do concreto são desprezadas. No caso do CRF, o concreto é assumido como um material homogêneo e a contribuição das fibras para a resistência na pós-fissuração é considerada no cálculo da estrutura.

O item 7.7.3.1 do MC 2010 descreve os três principais modos de ruptura das vigas no ELU, quais sejam: a) limite de deformação do concreto (ε_{cu}); b) limite de deformação do aço (ε_{su}); c) limite de deformação do CRF à tração (ε_{Fu}).

A Figura 9 mostra a variação da deformação na seção transversal do concreto e as tensões atuantes no ELS e ELU. Pode-se notar na Figura 9b a região tracionada e o efeito de amolecimento/enrijecimento devido à fissuração do concreto com transferência das

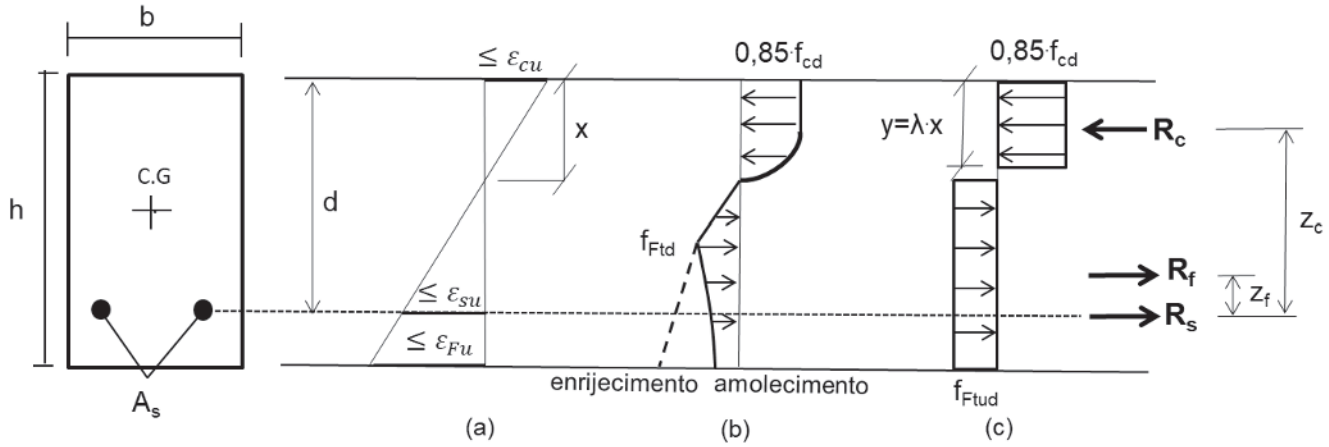

Figura 9
Diagrama de tensões e deformações do CARF (MC 2010): a) variação da deformação na seção transversal; b) tensões atuantes no ELS; c) tensões atuantes no ELU

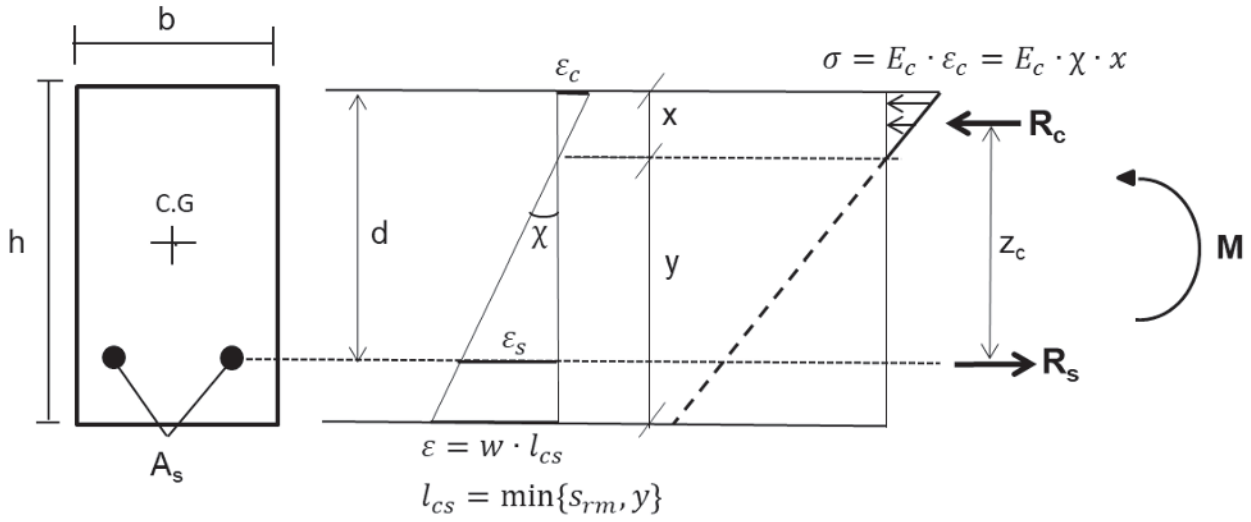

Figure 10
Diagramas de deformações e tensões para determinação do comprimento característico (l_{cs}) de vigas de concreto armado reforçadas com fibras (MC 2010)

tensões para as barras de aço e para as fibras. No ELU (Figura 9c), as fibras são responsáveis pela parcela de carga resistida pelo concreto à tração, sendo assumido um diagrama retangular simplificado cuja tensão resistente é igual à f_{Ftud} ($f_{Ftud} = f_{Ftuk}/\gamma_f$, em que $\gamma_f = 1{,}5$).

Para o cálculo das vigas, é necessário transformar a curva característica à tração σ_N-w em σ_N-ε. O MC 2010 adota o conceito de comprimento característico (BAZANT e CEDOLIN [17]; BARROS et al [18]; HORDIJK [19]; HILLERBORG et Al [20]) que correlaciona a abertura de fissuras com a deformação ($l_{cs} = w/\varepsilon$). De acordo com o MC 2010, o comprimento característico é igual ao espaçamento médio entre as fissuras (s_{rm}) no estado de multifissuração, determinado por meio de ensaios em laboratório. Na falta de parâmetros experimentais, o valor de l_{cs}, para o caso de concreto armado com fibras, é definido teoricamente pelo menor valor calculado entre a abertura média da fissura (s_{rm}) e a distância entre a linha neutra e a extremidade da borda tracionada (y = h - x) mostrada na Figura 10. Para concretos reforçados com fibras sem armadura, quando adotado o modelo de análise seccional assumindo o conceito de seção plana, l_{cs} pode ser definido como igual à altura da viga (l_{cs} = h).

O cálculo da altura da linha neutra (x) para determinar o valor de "y" é realizado por meio de análise elástica da seção fissurada, respeitando-se os limites de abertura e espaçamento de fissuras e desprezando a resistência residual do concreto com fibras. Para a seção fissurada, considera-se a armadura em escoamento ($\sigma_s = f_y$), sendo a altura da linha neutra definida de acordo com a Equação 6.

Tabela 7
Parâmetros adotados para o cálculo da distância entre as fissuras (EC-2, 2003)

Viga	k	τ_{bm} (MPa)	f_{ctm}	f_{Ftsm} (MPa)	$\rho_{s,eff}$
F20	1,0	8,49	4,72	0,64	0,045
F60	1,0	8,49	4,72	3,21	0,045

$$x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0{,}68 \cdot f_{cd} \cdot b} \quad (6)$$

O MC 2010 especifica uma equação para determinar a distância máxima entre as fissuras ($l_{s,max}$) em elementos de concreto armado reforçados com fibras, que é definido como o comprimento do trecho, a partir da seção fissurada, em que a tensão de aderência entre o concreto e o aço é desenvolvida (região em que ocorre o escorregamento entre a barra de aço e o concreto). A equação para o cálculo de $l_{s,max}$ é mostrada na Equação 7, em que: k = parâmetro empírico para considerar a influencia da camada de cobrimento, sendo admitido igual a 1,0; c = cobrimento do concreto; $\tau_{bm} = 1{,}8 f_{ctm}$ = tensão média de aderência; $\rho_{s,ef} = A_s/A_{c,ef}$ = taxa efetiva de armadura; Φ_s = *diâmetro da barra de aço*; $f_{Ftsm} = f_{Ftsk} / 0{,}7$.

$$l_{s,max} = k \cdot c + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Phi_s}{\rho_{s,ef}} \cdot \frac{f_{ctm} - f_{Ftsm}}{\tau_{bm}} \quad (7)$$

Para o cálculo da distância média entre as fissuras em elementos de concreto reforçados com fibras, é adotada a Equação 8.

Tabela 8
Valor do comprimento característico

Viga	$l_{cs} = \min\{s_{rm,y}\}$	s_{rm} (cm)	y (cm)
F20	9,35	9,35	21,20
F60	5,34	5,34	21,20

Tabela 9
Abertura máxima da fissura (w_u)

Viga	w_u (mm)
F20	1,87
F60	1,07

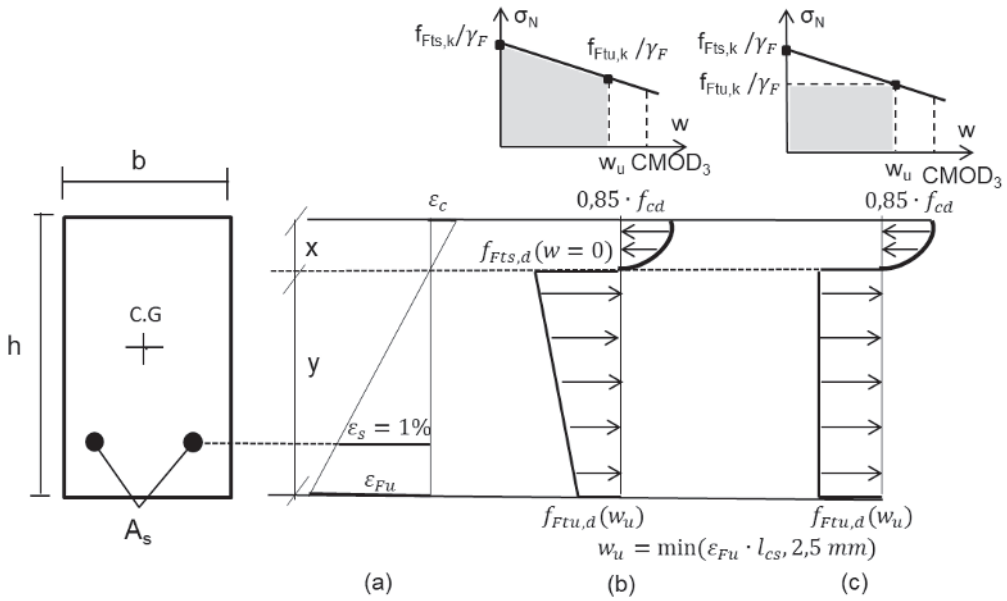

Figura 11
Diagramas de tensões do CRF no ELU utilizados para a verificação das vigas

$$s_{rm} = 1.5 \cdot l_{s,max} = 1.5 \cdot \left\{ k \cdot c + \frac{1}{4} \frac{\Phi_s}{\rho_{s,ef}} \frac{f_{ctm} - f_{Ftsm}}{\tau_{bm}} \right\} \quad (8)$$

No caso analisado, o comprimento característico (l_{cs}) foi arbitrado como o menor valor entre a distância da linha neutra e da extremidade da borda tracionada (y) e a distância média entre as fissuras (s_{rm}). Os parâmetros utilizados para o cálculo de s_{rm} são mostrados na Tabela 7. Na Tabela 8 é apresentado o valor definido para l_{cs}. A abertura máxima da fissura ($w_u = l_{cs} \cdot \varepsilon_{Fu}$) foi calculada como recomendado pelo MC 2010, a partir do comprimento característico e da fixação de uma deformação última de 2% (ε_{Fu} = 2%) para uma distribuição de deformações não linear ao longo da seção, respeitando-se o limite de w ≤ 2,5 mm. Os valores obtidos são mostrados na Tabela 9.

5.2 Verificação no Estado Limite Último

No caso em estudo (concreto armado com fibras submetido à flexão normal simples), a ruptura pode ocorrer de modo frágil pelo esmagamento do concreto na zona comprimida sem escoamento da armadura tracionada (domínio 4; ε_{cu} = 0,35%; ε_s < 0,2%) ou de modo dúctil pelo escoamento da armadura positiva seguida pela ruptura do aço (domínio 2; ε_{cu} < 0,35%; ε_s = 1,0%) ou pelo esmagamento do concreto (domínio 3; ε_{cu} = 0,35%; 0,2% < ε_s < 1,0%). A equação de equilíbrio para a verificação de vigas de CARF no ELU, considerando o caso de flexão normal simples (FNS), é mostrada na Equação 9. O cálculo do momento máximo de dimensionamento (M_{ud}) é mostrado na Equação 10, em que: z_c = braço de alavanca da força resultante de compressão do concreto; z_f = braço de alavanca da força resultante de tração do concreto. A Equação 11 descreve a força resistente à compressão do concreto (R_{cd}), em que η = equivalência entre o diagrama parábola-retângulo e o retangular; γ_c = fator de segurança do concreto; f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto; b = largura da viga. A Equação 12 descreve a força resistente da armadura tracionada (R_{sd}), em que: A_s = armadura positiva. A Equação 13 descreve a força resistente à tração do concreto devido à contribuição das fibras (R_{fd}), em que: $f_{Ft,k}$ = tensão residual característica do CRF no ELU; γ_F = fator de segurança do concreto à tração igual a 1,5; h = altura da viga. Nesse caso, é adotado um sinal positivo para forças de compressão e negativo para forças de tração. Foi considerado um fator de segurança para o concreto (γ_c) de 1,5 e para o aço (γ_s) de 1,15 de modo a preservar as premissas do MC 2010. Cabe lembrar que a NBR 6118:2014 [21] estipula um fator de segurança para o concreto de 1,4.

Tabela 10
Valores de cálculo adotados para a curva residual à tração

Viga	w_u (mm)	$f_{Fts,k}$	$f_{Ftu,k}$
F20	1,87	0,45	0,23
F60	1,07	2,25	1,39

$$R_{cd} - R_{fd} - R_{sd} = 0 \quad (9)$$

$$M_{ud} = R_{cd} \cdot z_c - R_{fd} \cdot z_f \quad (10)$$

$$R_{cd} = \eta \cdot 0{,}85 \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot b \cdot x \quad (11)$$

$$R_{sd} = A_s \cdot \frac{\sigma_s}{\gamma_s} \quad (12)$$

$$R_{fd} = \frac{f_{Ft,k}}{\gamma_F} \cdot b \cdot (h - x) \quad (13)$$

A contribuição da armadura negativa para a resistência da viga é desprezada, sendo respeitado o limite máximo de deformação do aço de 1% no domínio 2, como mostra a Figura 11a. São avaliadas

Tabela 11
Resultados da verificação das vigas de CA e CARF

	Viga	x (cm)	M_{ud} (kN.m)	F_d (kN)	F_{exp} (kN)	FS
Modelo 1 (tensão residual trapeizodal)	CA	3,82	34,85	116,17	157	1,35
	F20	4,02	36,00	120,00	169	1,41
	F60	4,83	40,55	135,17	180	1,33
Modelo 2 (tensão residual retangular)	CA	3,82	34,85	116,17	157	1,35
	F20	3,92	35,38	117,93	169	1,43
	F60	4,45	38,14	127,13	180	1,42

duas configurações para o diagrama de tensões residuais à tração: modelo trapezoidal (Figura 11b), considerando as tensões no ELS (f_{Fts}, w = 0) e ELU (f_{Ftu}, w_u); modelo retangular simplificado (Figura 11c) proposto pelo MC 2010, considerando a tensão no ELU (f_{Ftu}, w_u). Os valores da abertura máxima de fissura (w_u) e das tensões residuais no ELS e ELU são mostrados na Tabela 10.

O momento máximo resistido pela viga é calculado a partir da Equação 10. A altura da linha neutra, no domínio 2, é determinada conforme a Equação 14, em que: $f_{Ft,d} = f_{Ft,k}/\gamma_c$ = tensão residual de cálculo. No domínio 3, deve-se incluir a equação de compatibilidade para a solução já que, nesse caso, não é conhecida anteriormente a deformação da fibra inferior tracionada (ε_{Fu}).

$$x = \frac{A_s \cdot \sigma_s + f_{Ft,d} \cdot b \cdot h}{\eta \cdot 0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b + f_{Ft,d} \cdot b} \quad (14)$$

Os resultados obtidos para as vigas de concreto armado (CA) e de CARF, com teores de fibras de 20 kg/m³ e 60 kg/m³, são apresentados na Tabela 11.

A partir dos resultados, pode-se notar que há um enrijecimento da viga (aumento da altura da linha neutra) e um aumento da capacidade resistente com o aumento da quantidade de fibras incorporadas ao concreto. O aumento da rigidez é devido à restrição a abertura da fissura promovida pela ação de ponte das fibras (efeito de arrancamento) nas seções fissuradas. Com isso, há um incremento da altura da linha neutra, que se desloca para baixo, à medida que a quantidade de fibras aumenta. Além disso, o efeito positivo das fibras para a resistência à tração do concreto leva a um aumento da capacidade de resistência à flexão da viga.

Foi analisada a segurança estrutural que está relacionada com a adequada capacidade resistente última da estrutura para evitar o colapso. Os coeficientes de segurança parciais dos materiais e das ações externas têm a função de garantir a confiabilidade em relação às incertezas em relação às forças atuantes, os modelos de cálculo simplificados e a previsão do comportamento estrutural. Os fatores de segurança do MC 2010 foram estabelecidos a partir de um índice de confiabilidade para a verificação no ELU de 3,8 (β = 0,38), no qual é assumido um período de retorno de 50 anos para estruturas que apresentem mecanismos de redundância e ruptura dúctil (com aviso). O coeficiente parcial de segurança no ELU, para carregamentos permanentes com efeitos desfavoráveis, é de 1,35 (γ_f = 1,35).

Os dois modelos analisados (tensão de tração trapezoidal e retangular) levaram a resultados próximos. O fator de segurança calculado está dentro do valor recomendado pelo MC 2010, exceto para a viga F60 verificada através do modelo trapezoidal (FS = 1,33) que ficou ligeiramente abaixo do especificado pelo MC 2010. Dessa forma, recomenda-se adotar o modelo retangular devido à maior simplicidade de cálculo e para favorecer a segurança estrutural.

5.3 Análise seccional

A análise seccional (método das lamelas), esquematizada na Figura 12, é um procedimento computacional iterativo para a determinação

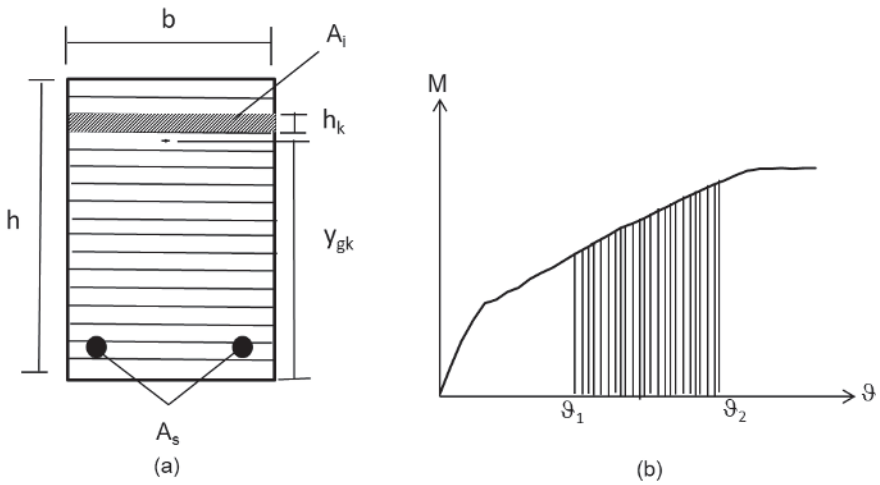

Figura 12
Análise seccional de vigas de CRF: a) seção transversal (lamelas); b) diagrama momento-curvatura

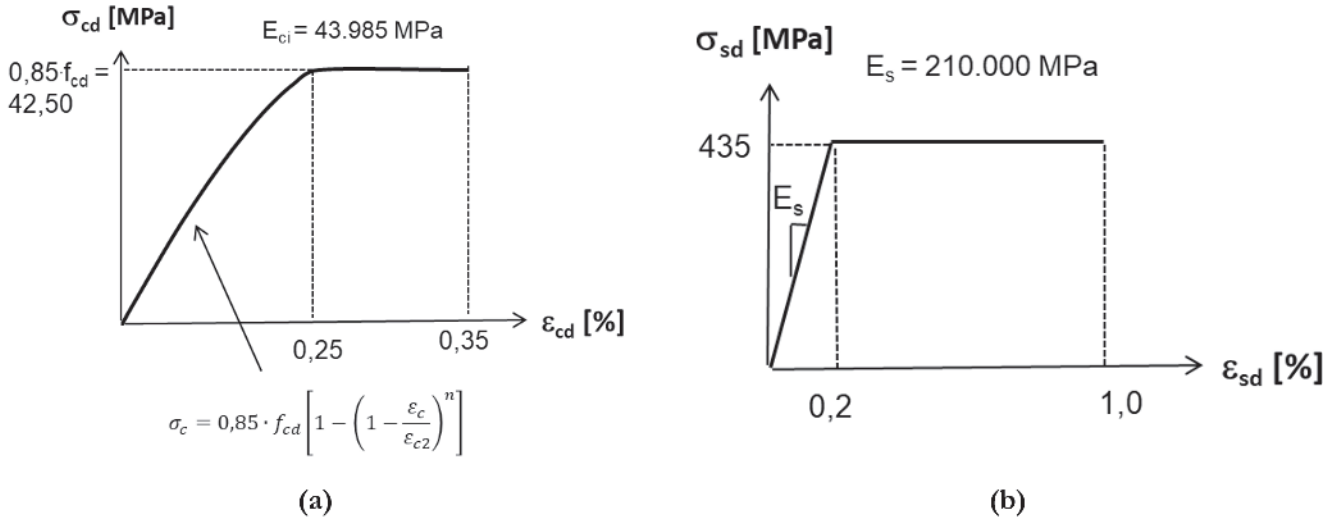

Figura 13
Relação constitutiva dos materiais: a) concreto à compressão (NBR 6118 [21]); b) aço CA-50

do comportamento à flexão (relação momento-curvatura) a partir da análise dos esforços atuantes na seção transversal do elemento estrutural. A convergência é alcançada em cada nova etapa de cálculo (incremento da curvatura) através de variações da altura da linha neutra, determinando-se o momento resistente. Os dados de entrada para o cálculo são as propriedades geométricas da seção e as propriedades mecânicas com as relações constitutivas dos materiais. As vantagens desse método são a sua simplicidade e eficácia para a verificação de elementos barriformes, com tensões atuantes em uma direção preferencial (estado plano de tensões).

No caso em análise foi considerada uma seção transversal de 125 mm x 250 mm. As relações constitutivas do concreto (NBR 6118:2014 [21]) e do aço são apresentadas na Figura 13. Foi considerado um fator de segurança para o concreto de 1,5 (γ_c = 1,5) e para o aço de 1,15 (γ_s = 1,15), como especificado pelo MC 2010. Na tração, é assumido, até o limite de resistência ($f_{ctm,d} = f_{ctm} / \gamma_c$ = 3,15 MPa), um comportamento elástico-linear, prevalecendo a Lei de Hooke ($E_{ci} = \sigma/\varepsilon$), sendo: $E_{ci} = 21{,}5 \cdot 10^3 \cdot (f_{cm}/10)^{1/3}$ = 43.985 MPa. Após a fissuração, é considerada a curva residual linear em termos de tensão nominal *versus* abertura de fissuras (σ_N-w) mostrada na Figura 4. Para a execução da análise seccional, a curva σ_N-w foi transformada em σ_N-ε, utilizando o conceito de comprimento característico (HILLERBORG et al [20]), definindo-se a deformação como: $\varepsilon = w / l_{cs}$. Foram realizadas duas análises, uma assumindo o valor do comprimento característico calculado no item 5.1 (Tabela 8) e outra considerando l_{cs} = h = 250 mm. O objetivo foi verificar a variação

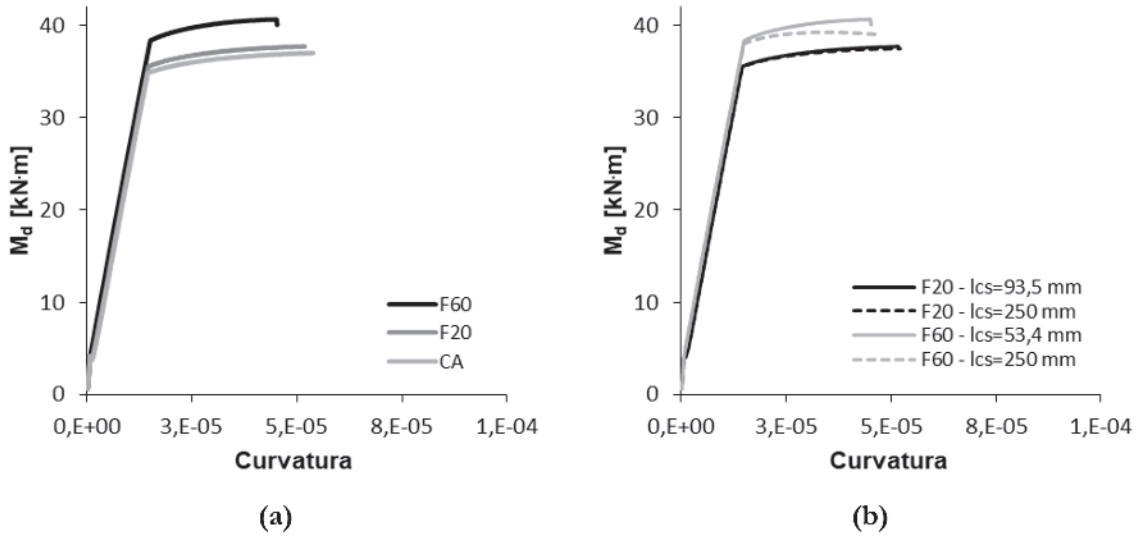

Figura 14
Relação momento-curvatura: a) F20 com l_{cs} = 9,35 cm e F60 com l_{cs} = 5,34 cm: b) comparação dos resultados com diferentes valores de l_{cs}

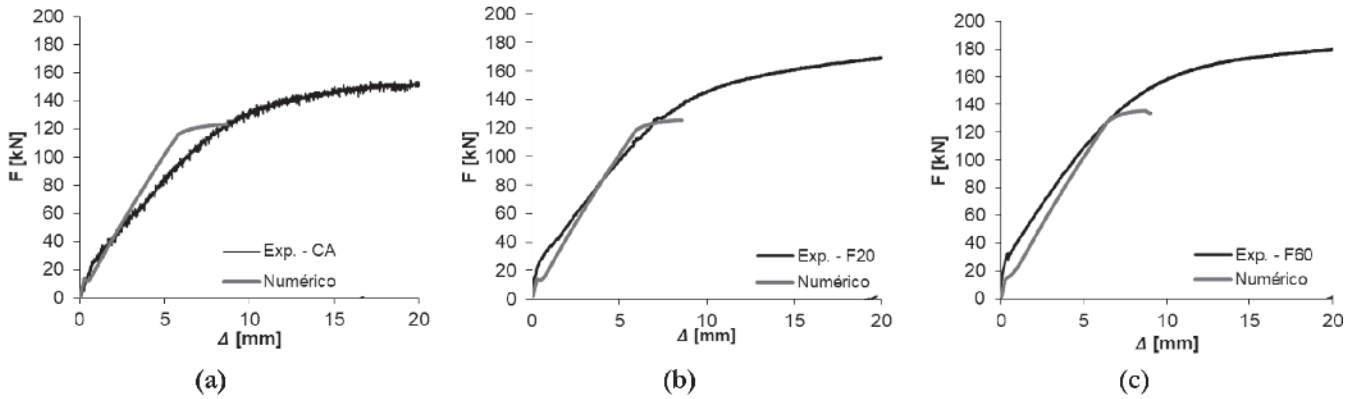

Figura 15
Comparação dos resultados da análise seccional com os valores experimentais: a) sem fibras; b) 20 kg/m³ de fibras, c) 60 kg/m³ de fibras

do comportamento estrutural das vigas de CARF. Na Figura 14 são mostrados os resultados em termos de momento-curvatura.

Os resultados demonstram um aumento do momento máximo resistente pela viga em função do aumento da quantidade de fibras adicionadas ao concreto, como pode ser observado na Figura 14a. Além disso, o aumento do valor de l_{cs} provocou uma redução do momento resistente, como mostra a Figura 14b. O aumento do valor do comprimento característico reduz a deformação máxima e, dessa forma, reduz a capacidade resistente no regime fissurado (Estádio 2). Na prática, o aumento do valor do comprimento característico significa um maior espaçamento entre as fissuras, o que representa uma redução da redundância da estrutura (menor capacidade de redistribuição de esforços internos). Isso pode ser observado na variação da resistência da viga mostrada na Figura 14b.

Na Figura 15 é apresentado o resultado da análise para as vigas de concreto armado com e sem fibras de aço em termos de força (F_d) versus deslocamento vertical (Δ).

Para a determinação da flecha foi utilizada a Equação 15, em que: l = vão da viga; E_{cs} = módulo de elasticidade secante; I_c = momento de inércia da seção bruta. Para a seção fissurada, é adotado o momento de inércia equivalente a partir da integração numérica da seção (Figura 12a).

Além disso, é assumida uma seção transversal homogeneizada ($A_{c,eq} = \alpha_E \cdot A_s$; $\alpha_E = E_s/E_c$), como descrito na Equação 16, em que: A_{ci} = área da seção de concreto considerada; y_{gk} = altura da linha neutra da seção de concreto considerada; A_{si} = área da barra de aço; y_{gsi} = altura da linha neutra da armadura. A linha neutra da seção transversal homogeneizada (x1) é descrita na Equação 17.

Tabela 12
Valores máximos das forças obtidas entre os resultados numéricos e experimentais

	CA	F20	F60
F_{exp} (kN)	157	169	180
F_d (kN)	123,36	125,72	135,53
$(FS)_d$	1,27	1,34	1,33

No caso analisado, a parte de concreto fissurada é considerada igual a zero: $\varepsilon_{ct} > {f_{ct}}/{E_{ci}} \Rightarrow A_{ci} = 0$.

$$\Delta = \frac{23}{648} \cdot \frac{F_d \cdot l^3}{E_{cs} \cdot I_c} \quad (15)$$

$$I_{eq} = A_i \cdot \int y^2 = A_{ci} \cdot \sum y_{gk}^2 + A_s \cdot \sum y_{gsi}^2 \leq I_c \quad (16)$$

$$x_1 = \frac{b \cdot h^2/2 + (\alpha_E - 1) \cdot A_s \cdot d}{b \cdot h + (\alpha_E - 1) \cdot A_s} \quad (17)$$

Na Tabela 12 é apresentada uma comparação entre os valores máximos obtidos pela análise numérica e os resultados experimentais. O modelo simplificado foi capaz de reproduzir satisfatoriamente o comportamento à flexão das vigas. O fator de segurança apresentou um valor menor em relação ao obtido na verificação estrutural descrita no item 5.2, uma vez que na análise seccional foi considerada a contribuição da tensão de tração do concreto não fissurado, que é desprezada nos modelos de dimensionamento.

6. Regra da mistura (rule of mixture)

A regra da mistura é um modelo de aproximação matemática pelo valor médio, utilizada para prever o comportamento de um material compósito constituído por fibras distribuídas aleatoriamente em uma direção principal. No caso em tela, o modelo matemático é utilizado para determinar o limite superior da tensão nominal à

Tabela 13
Parâmetros adotados no cálculo da tensão máxima à flexão pela Regra da Mistura

	F20	F60
σ_{bf0}	36,17	36,17
A	1,05	1,05
B	0,66	0,66
V_f (%)	0,26	0,77
l_f (mm)	35	35
d_f (mm)	0,55	0,55

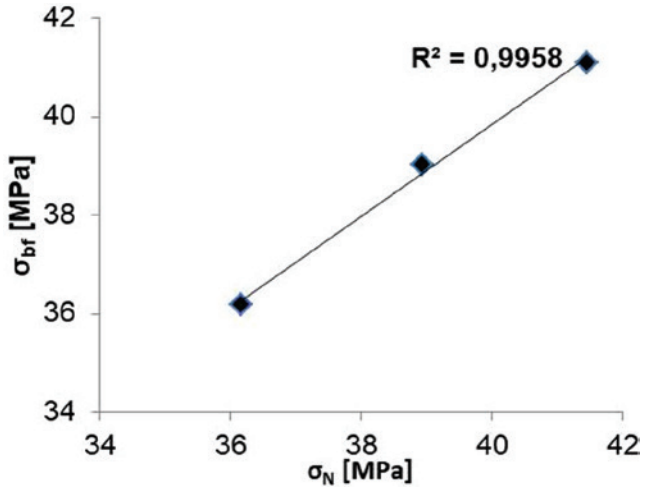

Figura 16
Valores das tensões nominais máximas obtidas dos resultados experimentais (σ_N) *versus* tensões à flexão máximas calculadas (σ_{bf})

flexão de elementos de concreto armado reforçados com fibras.
As hipóteses adotadas são:

- fibras uniformemente distribuídas na matriz de cimento;
- aderência perfeita entre as fibras e a matriz;
- forças aplicadas paralelamente ou perpendicularmente às fibras;
- comportamento elástico-linear dos materiais (concreto e fibras).

A equação para a determinação do limite superior da tensão à A equação para a determinação do limite superior da tensão à flexão (σ_{bf}) para vigas de CARF é descrita na Equação 18, em que: A e B = constantes empíricas; σ_{bf0} = resistência à flexão do concreto sem fibras; V_f = volume de fibras incorporadas no concreto; l_f = comprimento das fibras; d_f = diâmetro das fibras.

$$\sigma_{bf} = A \cdot \sigma_{bf0} \cdot (1 - V_f) + B \cdot V_f \cdot \left(\frac{l_f}{d_f}\right) \quad (18)$$

As constantes A e B foram determinadas a partir da melhor aproximação com os resultados experimentais. A Tabela 13 mostra os valores dos parâmetros adotados para o cálculo da tensão nominal à flexão.
Na Figura 16 são apresentados os valores da tensão nominal máxima obtida nos resultados experimentais (σ_N) e a tensão máxima à flexão calculada (σ_{bf}).
A partir dos resultados, é possível observar uma elevada correlação entre os valores experimentais e de cálculo que apresentam um coeficiente de determinação $R^2 \approx 1,0$. Portanto, no caso analisado, é válida a utilização da Regra da Mistura para estimar o valor da capacidade resistente de vigas de CARF com diferentes teores de fibras no concreto. Esse procedimento foi analisado por outros autores (NAAMAN [22]; KANG et al [23]) que concluíram pela eficácia da Regra da Mistura tanto em vigas de concreto de alta resistência (CAR) quanto de ultra-alto desempenho (CUAD) reforçadas com fibras.
É importante mencionar que, caso não haja informações sobre as propriedades mecânicas do material, as constantes empíricas A e B devem ser determinadas por meio de ensaios em laboratório.
A vantagem desse método é que ele garante maior liberdade ao projetista para especificar concretos com diferentes volumes de fibras a partir do conhecimento prévio das propriedades do concreto fibroso, sem necessidade de se recorrer a novos ensaios de laboratório para determinar as propriedades mecânicas do material. Também é possível fazer uma estimativa da resistência à flexão de um concreto existente (estrutura em uso) com teor de fibras diferente do especificado em projeto, desde que tenha sido feita a sua caracterização prévia.
Cabe mencionar que a análise da evolução das propriedades mecânicas do concreto reforçado com fibras de aço ao longo de 10 anos (TEIXEIRA BUTTIGNOL et al [4]), indicou que o aumento da resistência à tração pós-pico do CRF no ELU é desprezível. O aumento da resistência à tração do concreto ocorre devido ao incremento das propriedades da matriz de cimento (hidratação e fortalecimento das ligações entre os silicatos de cálcio hidratados) que não tem qualquer efeito sobre as propriedades da zona de interface entre a matriz e as fibras. Dessa forma, não se pode contar no dimensionamento com um possível ganho de resistência do CRF no tempo, prevalecendo a resistência aos 28 dias.

7. Conclusões

Nesse artigo foi realizada uma análise do comportamento à flexão de vigas de concreto armado reforçadas com fibras de aço. Foi feita a classificação e caracterização do material de acordo com as recomendações normativas do MC 2010. As curvas características à tração obtidas de ensaios experimentais foram utilizadas para a verificação da capacidade resistente das vigas no ELU seguindo os modelos previstos no MC 2010. Além disso, foi executada uma análise seccional pelo método das lamelas. Por último, foi analisada a eficácia da regra da mistura para prever a capacidade resistente à flexão do CRF com diferentes volumes de fibras. As principais conclusões são descritas a seguir.
A verificação no ELU, seguindo as recomendações descritas no MC 2010, se mostrou a favor da segurança. O fator de segurança calculado está dentro do valor recomendado pelo MC 2010, exceto para a viga F60 verificada através do modelo trapezoidal (FS = 1,33) que ficou ligeiramente abaixo do especificado pela norma. Dessa forma, recomenda-se adotar o modelo retangular devido à maior simplicidade de cálculo e para favorecer a segurança estrutural.
A análise seccional demonstrou uma boa aproximação com os resultados experimentais. Os valores da tensão nominal máxima ficaram próximos dos resultados calculados através do modelo de dimensionamento do MC 2010. O fator de segurança apresentou um valor menor em relação ao obtido na verificação estrutural devido a consideração da contribuição da tensão de tração do concreto não fissurado. Para uma análise mais rigorosa, devem-se utilizar, por exemplo, modelos baseados em elementos finitos que levem em consideração as condições de contorno e o valor correto do comprimento característico como descrito em DI PRISCO et al [24].
Uma questão relevante no dimensionamento de concretos reforçados com fibras é o valor arbitrado para o comprimento característico, parâmetro que correlaciona a abertura de fissuras com a deformação à tração. Para garantir a correta interpretação do comportamento estrutural da viga, deve-se levar em consideração o padrão de fissuração na análise seccional. No dimensionamento de estruturas de concreto armado reforçadas com fibras, isso é feito considerando o espaçamento médio entre as fissuras para determinar o comprimento característico, como descrito em DI PRISCO et al [25]. O valor médio

do espaçamento de fissuras (s_m) pode ser determinado em ensaios de laboratório ou a partir da equação recomendada pelo MC 2010. No caso analisado, os resultados obtidos foram satisfatórios, indicando que o procedimento pode ser adotado na falta de referências sobre o comportamento do material investigado.

O modelo da Regra da Mistura demonstrou ser confiável, com um elevado grau de correlação com os valores experimentais, o que indica a possibilidade de sua adoção para a determinação da capacidade resistente à flexão de vigas de concreto reforçado com diferentes volumes de fibras. Isso pode garantir maior liberdade ao projetista para especificar concretos com diferentes teores de fibras a partir do conhecimento prévio das propriedades do CRF, sem necessidade de se recorrer a novos ensaios experimentais para a determinação das propriedades mecânicas do material.

8. Agradecimentos

O primeiro autor agradece ao CNPq (Conselho Nacional de Pesquisa Tecnológicas) pelo apoio financeiro para a execução da pesquisa por meio da concessão de uma bolsa de pós-doutorado [152765/2016-6]. Um agradecimento especial a Furnas Centrais Elétricas pelo apoio financeiro ao projeto de pesquisa "CONCRETO FIBROSO DE ALTA PERFORMANCE EM ESTRUTURAS DE USINAS HIDRELÉTRICAS: MODELAGEM, EXPERIMENTAÇÃO E RECOMENDAÇÕES PARA PROJETO", cujos resultados experimentais são discutidos neste artigo.

9. Referências

[1] LÖFGREN, I.; STANG, H. AND OLESEN, J. F. Fracture properties of FRC determined through inverse analysis of wedge splitting and three-Point bending tests. Journal of Advanced Concrete Technology, vol. 3, no. 3, pp. 423-434, 2005.

[2] LARANJEIRA, F; GRUNEWALD, S.; WALRAVEN, J; BLOM, C; MOLINS, C and AGUADO, A. Characterization of the orientation profile of steel fiber reinforced concrete. Materials and Structures, nº 44, pp. 1093–1111, 2011.

[3] SOETENS, T. and MATTHYS, S.: Different methods to model the post-cracking behavior of hooked-end steel fibre reinforced concrete. Construction and Building Materials, nº 73, p. 458–471, 2014.

[4] TEIXEIRA BUTTIGNOL, T. E; COLOMBO, M and DI PRISCO, M. Long-term aging effects on tensile characterization of steel fibre reinforced concrete. Structural Concrete, 2016.

[5] FIB – International Federation for Structural Concrete. Fib Model Code for Concrete Structures 2010. Berlin: Verlag Ernst & Sohn, 2013.

[6] PRÁTICA RECOMENDADA IBRACON/ABECE - Projeto de Estruturas de Concreto Reforçado com Fibras. CT 303 – Comitê Técnico IBRACON/ABECE sobre Uso de Materiais não Convencionais para Estruturas de Concreto, Fibras e Concreto Reforçado com Fibras, 2016.

[7] EN 14651:2005. Test method for metallic fibre concrete - Measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual). European Committee for Standardization.

[8] VAN MIER, J. G. M.: "Mode I behavior of concrete influence of the rotational stiffness outside the crack zone". Rilem proceedings 6: Analysis of concrete structures by fracture mechanics, 1991, pp. 16-25.

[9] UNI 11039: "Concrete Renforced with Steel Fibres. Part II: Test Method for the Determination of First Cracking Strength and Ductility Indexes". 2003.

[10] QIAN, S. and LI, V. C.: "Simplified Inverse Method for Determining the Tensile Strain Capacity of Strain Hardening Cementitious Composites". Journal of Advanced Concrete Technology, vol. 5, nº 4, pp. 235-246, 2007.

[11] MOBASHER, B.; BAKHSHI, M and BARSBY, C.: "Back calculation of residual tensile strength of regular and high performance fiber reinforced concrete from flexural tests". Construction and Building Materials, nº 70, pp. 243–253, 2014.

[12] SOUSA, J. L. A. O. and RAVINDRA, G.: "Determining the Tensile Stress-Crack Opening Curve of Concrete by Inverse Analysis". Journal of Engineering Mechanics, nº 132, pp. 141-148, 2006.

[13] AMIN, A; FOSTER, S. J. and MUTTONI, A. Derivation of the σ-w relationship for SFRC from prism bending tests. Structural Concrete, pp. 93-105, 2015.

[14] SANTOS, F. G. and SOUSA, J. L. A. O. . "Determination of parameters of a viscous-cohesive fracture model by inverse analysis". Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 8, p.669-706, 2015.

[15] CARMONA, S; AGUADO, A and MOLINS, C. Characterization of the properties of steel fiber reinforced concrete by means of the generalized Barcelona test. Construction and Building Materials, nº 48, pp. 592–600, 2013.

[16] EN 1990. Eurocode: Basis of Structural Design, 2002.

[17] BAZANT, Z. P. and CEDOLIN, L. Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories." Oxford University Press, New York, 2nd. edition, 2003.

[18] BARROS, J. A. O., et al. Post-cracking behaviour of Steel fibre reinforced concrete." Materials and Structures, no. 38, pp. 47–56, 2005.

[19] HORDIJK, D. A.: Local Approach to Fatigue of Concrete." PhD thesis, Delft University of Technology, 1991.

[20] HILLERBORG, A.; MODEER, M. and PETERSON, P. E.: Analysis of crack formation and crack growth by means of fracture mechanics and finite elements. Cement and Concrete Research, no. 6, pp. 773–782, 1976.

[21] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto. 2014.

[22] NAAMAN A. E. "A statistical theory of strength for fiber reinforced concrete". PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology; 1972.

[23] KANG, S-T; LEE, Y.; PARK, Y-D; KIM, J-K. Tensile fracture properties of an Ultra High Performance Fiber Reinforced Concrete (UHPFRC) with steel fiber. Composite Structures, nº 92, pp. 61-71, 2010.

[24] DI PRISCO, M.; COLOMBO; M. and COLOMBO, I. The role of the structural characteristic length. 9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, 2016.

[25] DI PRISCO, M.; COLOMBO; M. and DOZIO, D. Fibre-reinforced concrete in fib Model Code 2010: principles, models and test validation. Structural Concrete, vol. 14, pp. 342-361, 2013.