

## Analysis of the influence of column reinforcement anchorage length in a concrete two-pile cap

### *Análise da influência do comprimento de ancoragem da armadura do pilar no bloco sobre duas estacas*



R. P. RANDI<sup>a</sup>  
ricardo\_randi@hotmail.com

L. C. ALMEIDA<sup>a</sup>  
almeida@fec.unicamp.br

L. M. TRAUTWEIN<sup>a</sup>  
leandromt@fec.unicamp.br

F. S. MUNHOZ<sup>b</sup>  
fabiana.munhoz@fatec.sp.gov.br

#### Abstract

This paper describes the parametric analysis applied to assess the influence of column anchorage-reinforcement length on concrete two-pile caps under uniform compression. The non-linear numerical analysis was conducted with the bi-dimensional elements of ATENA 2D software, considering perfect adherence between steel and concrete. Simulation was based on the experimental reference model by Munhoz [1], which was the parameter adopted to validate the numerical modeling. From the validated model, four different anchorage reinforcement lengths were adopted, 34,0 cm, 20,0 cm, 10,0 cm e 3,0 cm, in order to compare pile caps behavior after these changes. Pile cap simulations presented similar behavior, i.e., column anchorage reinforcement length is not a preponderant factor for the internal mechanisms that regulate the function of these elements.

**Keywords:** reinforced concrete, pile caps, anchorage, numerical analysis, finite elements.

#### Resumo

Este artigo analisa parametricamente a influência do comprimento da armadura de ancoragem do pilar em um bloco de concreto sobre duas estacas, submetido à compressão uniforme. A análise numérica não linear é realizada com o emprego dos elementos finitos bidimensionais do programa computacional ATENA 2D, considerando aderência perfeita entre aço e concreto. A simulação é baseada em um modelo experimental de referência, oriundo da pesquisa de Munhoz [1], utilizado como parâmetro para validar a modelagem numérica. A partir do modelo validado, adotaram-se quatro comprimentos diferentes de ancoragem das armaduras do pilar, sendo 34,0 cm, 20,0 cm, 10,0 cm e 3,0 cm, a fim de comparar o comportamento dos blocos após essas alterações. As simulações dos blocos apresentaram comportamentos semelhantes, ou seja, o comprimento das armaduras de ancoragem dos pilares não é um fator preponderante para os mecanismos de funcionamento interno desses elementos.

**Palavras-chave:** concreto armado, blocos sobre estacas, ancoragem, análise numérica, elementos finitos.

<sup>a</sup> University of Campinas, Civil Engineering, Architecture and Urbanism School, Campinas, SP, Brazil;  
<sup>b</sup> Jahu School of Technology, Jaú, SP, Brazil.

## 1. Introdução

A teoria mais aceita e difundida para a descrição do comportamento de blocos sobre estacas é a de Blévoit & Frémy [2] que se tornou uma referência para outros pesquisadores e códigos normativos. A principal contribuição dos autores citados é a elaboração do Modelo de Bielias e Tirantes que explica de forma consistente o fluxo de tensões nos blocos. Os autores observaram que grande parte dos modelos ensaiados rompeu pelo esmagamento do concreto das bielias de compressão, após o surgimento de fissuras paralelas ao fluxo de tensões de compressão, oriundas da ação de esforços de tração perpendiculares às bielias, conhecido por fendilhamento do concreto. Durante décadas foram realizados novos estudos experimentais que comprovam de forma assertiva essas conclusões. Com a evolução computacional e do Método dos Elementos Finitos pode-se comprovar analiticamente e de forma refinada, o comportamento dos blocos.

Mautoni [3] estudou de forma aprofundada os mecanismos de ruptura dos blocos. Foram ensaiados modelos com distribuições diferentes de armadura e constatou-se que os modelos romperam por esmagamento do concreto nas bielias de compressão (fendilhamento), corroborando com os resultados de Blévoit & Frémy [2]. O autor Buttignol [4] realizou análises numéricas comparativas aos ensaios experimentais de Delalibera [5] e Miguel [6] e constatou, como os autores anteriormente citados, o fenômeno de fendilhamento e a formação das bielias de compressão. Ainda segundo Buttignol [4] a comparação entre os resultados numéricos e experimentais demonstraram a complexidade de reprodução dos ensaios experimentais em computador. Uma das principais diferenças encontradas é a rigidez estrutural dos blocos, também observada por Delalibera [5], que ainda cita três motivos que explicam a maior rigidez do modelo numérico, sendo, a acomodação dos modelos experimentais no início do ensaio, a consideração de aderência perfeita entre as barras de armadura e concreto e, finalmente, a suposição de ligação perfeita entre as estacas e o bloco. Em relação ao presente artigo, serão realizadas comparações, en-

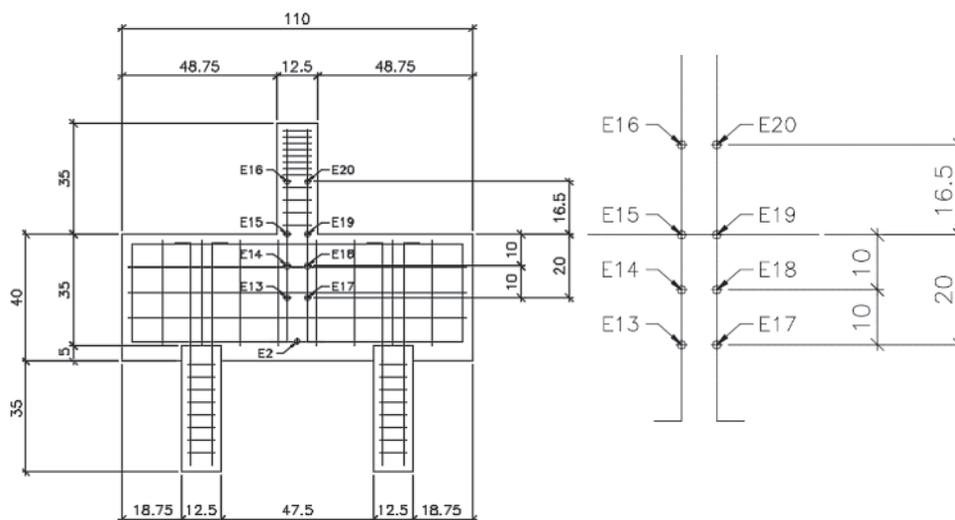
tre os resultados experimentais e numéricos de blocos sobre duas estacas, com a finalidade de validar a simulação numérica com auxílio do programa computacional ATENA 2D, nos quais os resultados experimentais são oriundos das pesquisas de Munhoz [1]. Especificamente serão analisados os comportamentos das armaduras de ancoragem do pilar. Sabe-se que atualmente não existem muitos trabalhos acerca deste assunto. Notavelmente Munhoz [1] analisou, entre outros resultados, a influência da seção e das diferentes taxas de armadura dos pilares na transmissão de esforços pilar/bloco. Segundo as análises da autora, as deformações e tensões nas armaduras de ancoragem dos pilares diminuem ao longo do seu comprimento, mas são totalmente transferidas para o bloco a partir de certa profundidade, dependendo da seção transversal do pilar, da taxa de armadura e distribuição das armaduras do pilar.

### 1.1 Justificativa

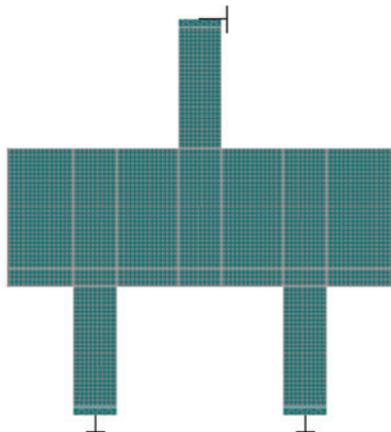
Blocos sobre estacas são importantes elementos estruturais de transição de esforços da superestrutura para a infraestrutura. Os principais códigos normativos indicam o Modelo de Bielias e Tirantes para o dimensionamento de blocos, como por exemplo, o ACI 318 [7], o CEB-FIP [8] e a ABNT NBR6118/2014 [9]. Em consequência disto, torna-se essencial a pesquisa para compreender o comportamento do modelo e tornar o dimensionamento de blocos sobre estacas mais seguro.

Com a evolução computacional, aliado ao Método dos Elementos Finitos, muitas pesquisas passaram a utilizar, além de ensaios experimentais, simulações numéricas. Consequentemente, as análises numéricas devem apresentar resultados que simulam de forma adequada o comportamento das estruturas. Portanto, as comparações entre modelos experimentais e numéricos devem ser estudadas com a finalidade de compreender as convergências e divergências entre modelos, visando melhor utilização de programas computacionais.

Em relação ao cerne deste artigo, ou seja, a análise do comportamento da ancoragem das armaduras do pilar no bloco de duas



**Figura 1**  
Geometria, distribuição de armaduras e localização dos extensômetros no modelo analisado



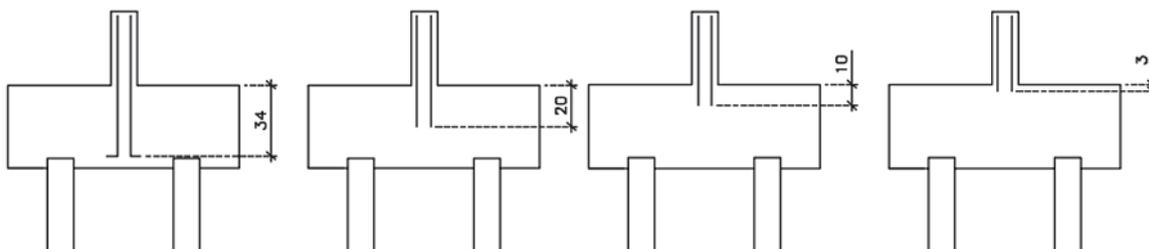
**Figura 2**  
Discretização dos elementos finitos para o modelo numérico B110P125R2.5M1

estacas, justifica-se esse trabalho pela escassez de pesquisa neste tema. A partir de resultados confiáveis acerca do comportamento da ancoragem das armaduras, espera-se contribuir no aprimoramento de normas e modelos mais precisos e econômicos.

## 2. Metodologia de análise

Foram realizadas comparações no comportamento de blocos de concreto sobre duas estacas. O programa computacional ATENA 2D foi utilizado para a modelagem dos blocos numéricos. As propriedades dos materiais, aço e concreto, e a geometria do elemento, foram baseadas nos ensaios experimentais e no modelo B110P125R2.5 de Munhoz [1].

O modelo de bloco, apresentado na Figura 1, possui geometria 110,0 cm x 15,0 cm x 40,0 cm. A armadura do tirante é composta por quatro barras de 12,5 mm sobre as estacas, a armadura superior é composta por três barras de 10,0 mm e a armadura do bloco é completada por estribos horizontais e verticais de 6,3 mm. As estacas possuem seção 12,5 cm x 12,5 cm, altura de 40,0 cm (5,0 cm adentrando o bloco), armadura longitudinal (adentrando o bloco) de 10,0 mm e estribos ao longo da estaca de 5,0 mm. O pilar possui seção 12,5 cm x 12,5 cm e altura de 35,0 cm. A armadura longitudinal do pilar é composta por quatro barras de 12,5 mm e foram dispostas armaduras de fretagem e estribos de 5,0 mm ao longo da altura do pilar.



**Figura 3**  
Conjunto de modelos numéricos simulados a partir do modelo B110P125R2.5

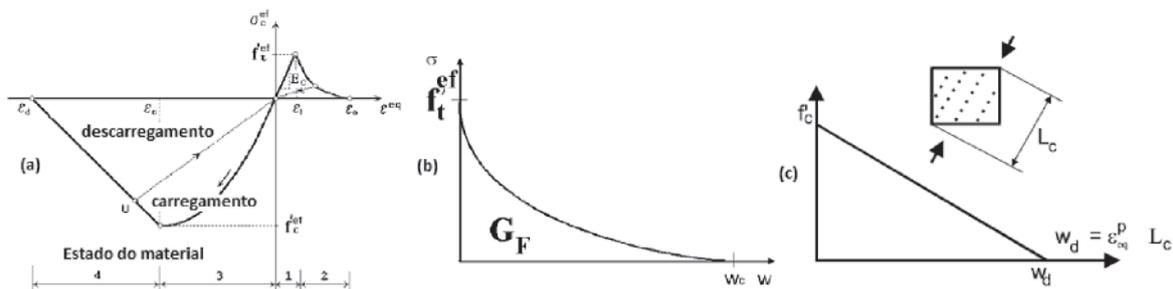
A Figura 1 apresenta a localização dos extensômetros utilizados para medir as deformações nas armaduras, sendo indicados pela letra E. Foram escolhidos cinco parâmetros de comparação para a validação do modelo, relativos às curvas carga *versus* deslocamento, às cargas de ruptura, às deformações e tensões nas armaduras, aos fluxos de tensões, aos panoramas de fissuração e aos modos de ruptura.

## 3. Análise numérica

As análises numéricas não lineares foram realizadas no programa computacional ATENA 2D, versão 5.3.2, baseado no Método do Elementos Finitos e distribuído pela empresa Cervenka Consulting. O embasamento teórico do programa é descrito no Manual Teórico – Parte 1, elaborado por Cervenka Consulting [10].

A aplicação do carregamento foi realizada através de incrementos de carga, divididos em dez incrementos de 20,0 kN, quinze incrementos de 10,0 kN e, finalmente, incrementos de 5,0 kN até a ruptura dos modelos, aplicados verticalmente em cargas lineares ao longo do topo dos pilares. As condições de contorno foram impostas em três pontos distintos, sendo os dois primeiros nos eixos das estacas, restringindo os deslocamentos verticais do modelo (direção y) e o terceiro no eixo do topo do pilar, restringindo os deslocamentos horizontais do modelo (direção x), como apresentados na Figura 2. Os pontos de monitoração nas armaduras foram alocados em posições estratégicas, equivalentes aos do modelo de Munhoz [1], como apresentados na Figura 1, visando realizar comparações entre os modelos experimentais e numéricos. O método de Newton-Raphson foi adotado para a realização dos cálculos matemáticos iterativos até ocorrer convergência entre as funções diferenciais em cada incremento de carga. O incremento é realizado em passos de carga e, para cada iteração, são realizados cálculos até ser alcançado o equilíbrio da estrutura e seus respectivos deslocamentos. As iterações são repetidas até que ocorra convergência dos resultados.

Para o estudo paramétrico da variação do comprimento de ancoragem das armaduras do pilar, foram alterados nos modelos numéricos somente estes comprimentos, mantendo-se as demais características e propriedades mecânicas dos materiais. Para o modelo experimental B110P125R2.5, simulou-se quatro modelos numéricos com variação dos comprimentos de ancoragem das armaduras dos pilares, apresentados na Figura 3, identificados com acréscimo de M1, M2, M3 ou M4 ao final da nomenclatura. O modelo M1 é o modelo numérico com o comprimento de ancoragem



**Figura 4** Curvas tensão *versus* deformação característica do concreto, tensão *versus* abertura de fissuras e relaxamento linear segundo o critério de Drucker Prager (Cervenka Consulting [10])

da armadura do pilar no bloco de 34,0 cm, idêntico ao adotado no modelo experimental de Munhoz [1]. Os modelos M2, M3 e M4 são os modelos numéricos com os comprimentos de ancoragem das armaduras dos pilares nos blocos de 20,0 cm, 10,0 cm e 3,0 cm, respectivamente.

As propriedades dos materiais necessárias para as análises numéricas foram, na maioria, obtidas dos resultados dos ensaios do modelo B110P125R2.5, detalhado em Munhoz [1]. Os comportamentos dos materiais utilizados pelo programa computacional ATENA 2D estão descritos em Manual Teórico – Parte 1, elaborado por Cervenka Consulting [10]. O modelo constitutivo de fratura plástica, representada por uma curva de tensão *versus* deformação, caracterizada como na Figura 4(a), foi adotado para o concreto. A Energia Específica de Fratura ( $G_f$ ), outro importante parâmetro para a modelagem de elementos de concreto, é dada pela Equação 1, onde,  $f_t^{ef}$  representa a resistência a tração efetiva do concreto. A Figura 4(b) é relativa ao parâmetro que mede a taxa da Energia Específica de Fratura e é associado ao comportamento do elemento de concreto no regime não linear ou pós-fissurado. A Lei de Hooke descreve o comportamento do concreto à tração no regime elástico. Segundo Manual Teórico – Parte 1, elaborado por Cervenka Consulting [10], o comportamento do plano de ruptura após a abertura das primeiras fissuras, conhecido por regime de tensão pós-fissuração, é descrito através do Modelo de Plasticidade de Drucker-Prager, como visto na Figura 4(c). Finalmente, para o comportamento à compressão é utilizado o Critério de Ruptura de Rankine.

$$G_f = 0,000025 \cdot f_t^{ef} \tag{1}$$

Para as curvas tensão *versus* deformação das armaduras, foram utilizados os dados experimentais obtidos por Munhoz [1]. O ATENA 2D permite construir a curva tensão *versus* deformação, a partir de

**Tabela 1** Parâmetros do material concreto

	Bloco e pilar	Estaca	Unidade
Resistência à compressão ( $f_c$ )	33,86	77,91	MPa
Resistência à tração ( $f_t$ )	2,97	4,49	MPa
Módulo de elasticidade ( $E_c$ )	35,110	44,050	MPa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,20	0,20	-
Energia específica de fratura ( $G_f$ )	69,99	122,00	J/m <sup>2</sup>

pontos conhecidos, para simular o comportamento do aço. Para as chapas de aço dos apoios das estacas e do ponto de aplicação de carga sobre o pilar foi escolhido um material com comportamento elástico isotrópico, de tensões planas. As chapas foram utilizadas para auxiliar a distribuição das tensões nos pontos de aplicação e reação das cargas. Para a interface chapa/pilar utilizou-se ligação rígida e na interface chapa/estacas utilizou-se um elemento de interface com a finalidade de conectar de forma adequada os elementos das chapas e concreto.

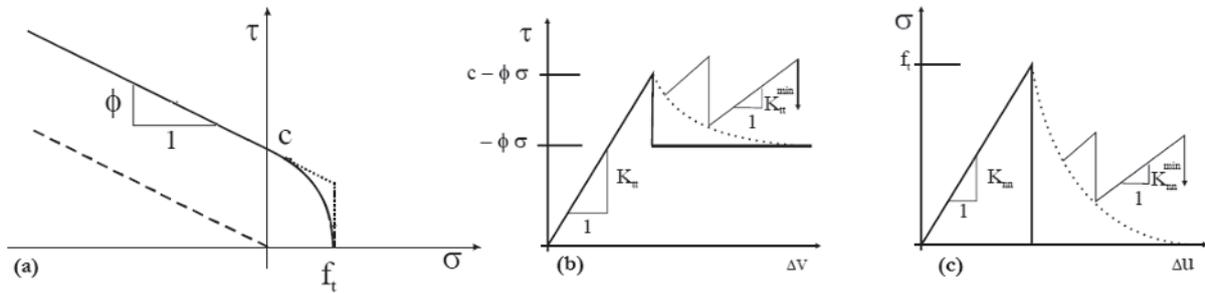
As Tabelas 1 e 2 apresentam os parâmetros físicos dos materiais utilizados nos modelos numéricos. Para os concretos, os valores de resistência à compressão ( $f_c$ ), resistência à tração ( $f_t$ ), módulo de elasticidade ( $E_c$ ) e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) foram retirados de ensaios experimentais enquanto a Energia Específica de Fratura ( $G_f$ ) é dada pela Equação 1. Para os elementos de interface são utilizados seis parâmetros para simular o contato e a rigidez entre os materiais adjacentes. Esses parâmetros são visualizados na Tabela 3. Segundo Manual Teórico – Parte 1, elaborado por Cervenka Consulting [10], os elementos de interface são baseados no Critério

**Tabela 2** Parâmetros das chapas de aço

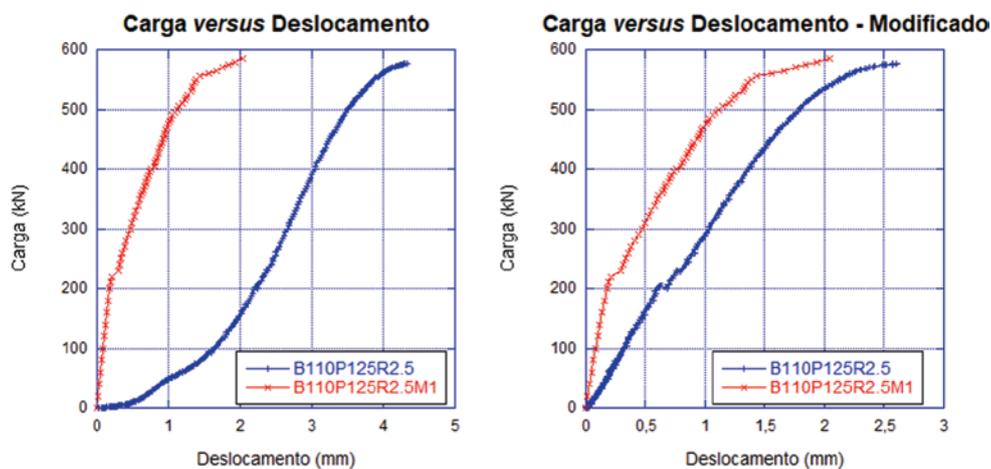
	Chapa	Unidade
Espessura	2,54	cm
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,30	-
Módulo de elasticidade ( $E_s$ )	210.000	MPa

**Tabela 3** Parâmetros dos elementos de interface

	Interface chapa/estaca	Unidade
Rigidez normal ( $k_{nn}$ )	$1,5 \cdot 10^5$	MN/m <sup>3</sup>
Rigidez normal mínima ( $k_{nn,min}$ )	$1,5 \cdot 10^2$	MN/m <sup>3</sup>
Rigidez transversal ( $k_{tt}$ )	$1,5 \cdot 10^5$	MN/m <sup>3</sup>
Rigidez transversal mínima ( $k_{tt,min}$ )	$1,5 \cdot 10^2$	MN/m <sup>3</sup>
Resistência à tração ( $f_t$ )	4,49	MPa
Coesão (C)	5,00	MPa



**Figura 5**  
Comportamento dos elementos de interface (Cervenka Consulting [10])



**Figura 6**  
Curva carga versus deslocamento, original e modificado, modelo B110P125R2.5 e B110P125R2.5M1

de Mohr-Coulomb. As rigidezes normal ( $K_{nn}$ ) e transversal ( $K_{tt}$ ) correspondem ao comportamento elástico do material e os valores máximos devem ser dez vezes o valor da rigidez dos elementos finitos adjacentes. As rigidezes mínimas são uma suposição numérica após a ruptura do elemento para manter a continuidade do equilíbrio do elemento estudado e devem ser 0,001 vezes o valor máximo. A resistência à tração ( $f_t$ ) da interface é utilizada para ponderar uma possível ruptura no material da interface causada por tensões de tração. A coesão (C) evita escorregamentos horizontais entre os materiais, vale observar que para a interface chapa/estaca o valor da coesão deve ser maior do que zero, mesmo que a carga aplicada seja vertical e distribuída igualmente na chapa, pois com o início da deformação do elemento e da abertura de fissuras pode ocorrer escorregamentos horizontais. A Figura 5 apresenta o comportamento dos elementos de interface.

#### 4. Análise de resultados dos modelos experimental versus numérico

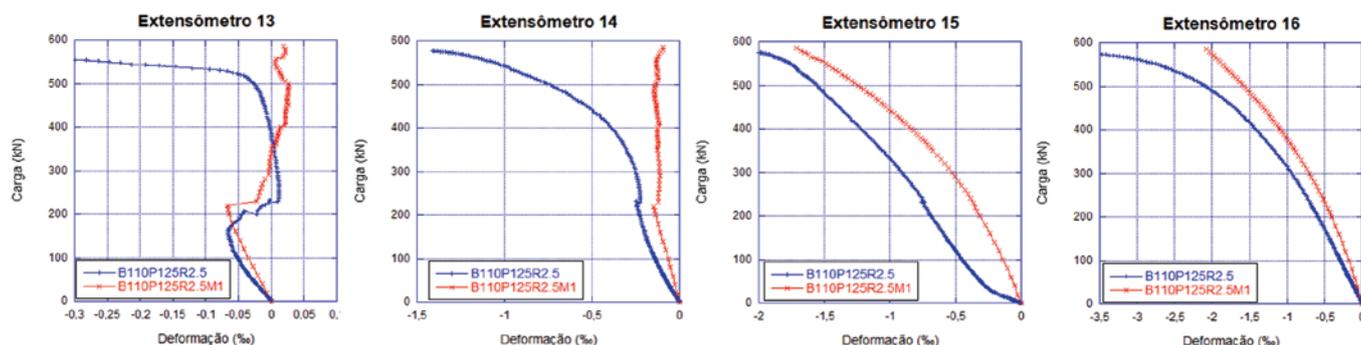
##### 4.1 Curva carga versus deslocamento e cargas de ruptura

As curvas carga *versus* deslocamento, Figura 6, consistem nos resultados da carga externa aplicada e a medida do deslocamento vertical no centro da face inferior do bloco. Nestes gráficos verifica-se o fenômeno de acomodação dos apoios dos modelos experimentais no início do ensaio, pois se observa a existência de um intervalo não linear nas medidas de deslocamentos, tornando as curvas experimental e numérica distantes. A curva da esquerda apresenta o resultado experimental original de Munhoz [1], e a curva da direita apresenta o resultado experimental modificado, após a retirada do intervalo não linear.

**Tabela 4**

Cargas de ruptura, cargas de comparação e deslocamentos máximos na ruptura, para os modelos B110P125R2.5 e B110P125R2.5M1

Modelo	Tipo de análise	$F_u$ (kN)	$F_{comp}$ (kN)	$F_{u,num} / F_{u,exp}$	$W_{Fu}$ (mm)
B110P125R2.5	Experimental	577,08	491,83	1,01	2,628
B110P125R2.5M1	Numerical	585,00	491,83	1,01	2,044



**Figura 7**

Curvas carga *versus* deformação nas armaduras de ancoragem do pilar, B110P125R2.5 e B110P125R2.5M1

Nota-se que após os ajustes, as curvas experimental e numérica tornam-se próximas e com comportamentos semelhantes. Os pequenos patamares que são visualizados em determinado ponto do ensaio são causados pelo surgimento das primeiras fissuras com abertura significativa.

Na Tabela 4 são apresentados os valores das cargas de ruptura ( $F_u$ ), das cargas de comparação ( $F_{comp}$ ), dos deslocamentos máximos na ruptura ( $W_{Fu}$ ) e as relações entre essas cargas.

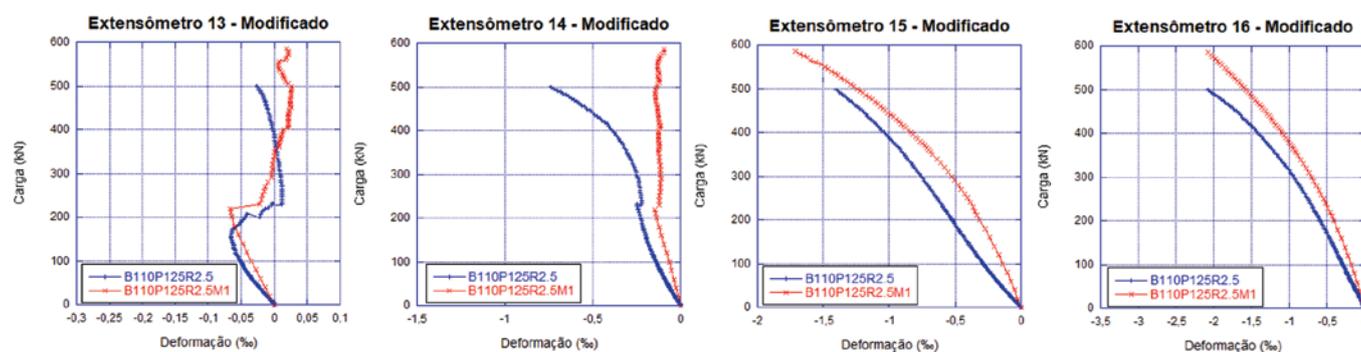
A relação  $F_{u,num} / F_{u,exp}$ , entre as cargas de ruptura ( $F_u$ ) dos modelos numérico e experimental, apresentaram diferença de 1,0%, comprovando que a análise numérica apresentou proximidade ao ensaio experimental. Os deslocamentos máximos na ruptura ( $W_{Fu}$ ) apresentam algumas disparidades, ocasionadas pelas diferentes rigidezes entre os modelos, também verificado nas pesquisas de Buttignol [4] e Delalibera [5].

#### 4.2 Deformações e tensões nas armaduras

Foram utilizados quatro pontos de monitoração nas armaduras de ancoragem dos pilares, em pontos equivalentes para os modelos experimental e numérico, com o objetivo de verificar a variação de deformações e tensões. Nota-se pela Figura 1 que os extensômetros E13/E17, E14/E18, E15/E19 e E16/E20 são simétricos. Considerando a simetria e a proximidade dos resultados, serão apresentados somente os resultados de E13, E14, E15 e E16.

A Figura 7 apresenta os resultados carga *versus* deformação para esses extensômetros. É possível verificar dois fenômenos que causam

divergências entre resultados de modelos experimentais e numéricos: a acomodação dos modelos experimentais no início do ensaio e a consideração de aderência perfeita entre as armaduras e concreto. Observa-se nas curvas dos extensômetros E13 e E14, que após determinada carga (aproximadamente 500,0 kN) as medidas de deformações, no modelo experimental, aumentam de forma brusca, contrariando o modelo numérico, no qual as deformações aumentam de forma suave e com pequenas variações. O comportamento brusco é característico do escorregamento entre armadura e concreto que ocorre em modelos experimentais, mas para modelos numéricos, com aderência é considerada perfeita, não se verifica este fenômeno. Nota-se também, pelo início da curva do extensômetro E15, a acomodação do modelo experimental, fato também verificado anteriormente na curva carga *versus* deslocamento. Analisando o extensômetro E16, verifica-se o escoamento da armadura longitudinal do pilar para o modelo experimental. Segundo dados de Munhoz [1], a deformação de escoamento do aço ( $\epsilon_{y,m}$ ) para barras de 12,5 mm é 3,42 ‰, e esta deformação máxima foi atingida com aproximadamente 572 kN, menor que a carga última do ensaio, 577,08 kN. No entanto, os pilares dos modelos experimentais são cintados, possuindo além de estribos, armaduras de fretagem, portanto, os pilares são excessivamente rígidos e mesmo com deformações muito próximas aos limites, não ocorre ruína brusca. Considerando as informações acima, realizaram-se algumas alterações nos dados experimentais com a finalidade de melhor comparar os comportamentos entre os dois modelos, visto que alguns fenômenos não ocorrem no modelo numérico. Para as



**Figura 8**

Curvas carga *versus* deformação, modificados, nas armaduras do pilar

**Tabela 5**

Deformações ( $\epsilon$ ) e tensões ( $\sigma$ ) nas armaduras dos modelos B110P125R2.5, com valores modificados após alterações das curvas tensão *versus* deformação, e B110P125R2.5M1

Extensômetro	0,33.F <sub>u</sub>	-	0,66.F <sub>u</sub>	-	F <sub>comp</sub>	-	F <sub>u</sub>	-
-	$\epsilon$ (‰)	$\sigma$ (MPa)	$\epsilon$ (‰)	$\sigma$ (MPa)	$\epsilon$ (‰)	$\sigma$ (MPa)	$\epsilon$ (‰)	$\sigma$ (MPa)
<b>B110P125R2.5</b>								
2	0,464	91,83	1,221	241,71	1,664	329,58	2,179	431,54
13	-0,049	-9,69	0	0,1	-0,023	-4,47	-0,027	-5,32
14	-0,22	-43,6	-0,35	-69,34	-0,702	-139,1	-0,747	-148,01
15	-0,502	-99,46	-0,978	-193,74	-1,375	-272,28	-1,412	-279,6
16	-0,55	-109,01	-1,307	-258,87	-2,013	-398,59	-2	-396,04
<b>B110P125R2.5M1</b>								
2	0,203	40,2	1,211	239,8	1,724	341,39	2,35	465,35
13	-0,064	-12,67	0,01	1,99	0,026	5,17	0,019	3,8
14	-0,136	-26,89	-0,127	-25,15	-0,144	-28,5	-0,093	-18,46
15	-0,314	-62,2	-0,783	-155,13	-1,199	-237,43	-1,714	-339,41
16	-0,404	-80,08	-1,024	-202,77	-1,521	-301,19	-2	-396,04

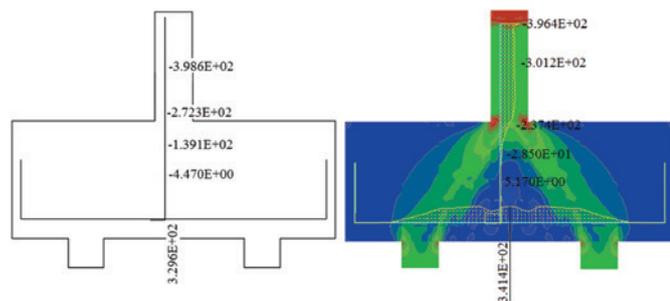
curvas dos extensômetros 13 e 14 foram retirados os resultados que abrangem o fenômeno de escorregamento da armadura. Na curva do extensômetro 15 alterou-se o início do ensaio, a fim de descartar o intervalo do ensaio caracterizado pela acomodação do modelo. Finalmente, para o extensômetro 16, foram descartados os valores de deformação na barra acima de 2,0‰, pois a máxima deformação do concreto na compressão foi atingida. Os resultados das curvas modificadas são apresentados na Figura 8. Em relação ao extensômetro 13, a Figura 8 apresenta que os comportamentos são semelhantes para os modelos experimental e numérico. Inicialmente, a armadura está comprimida (região negativa do gráfico), e após determinada carga, a armadura apresenta comportamento à tração, causada pelo deslocamento devido à fle-

xão do modelo, deslocando também a armadura. Observa-se também que o patamar de abertura da primeira fissura visível ocorre na região negativa do gráfico, para ambos os modelos.

O comportamento do extensômetro 14, Figura 8, é apenas de compressão, visto que é mais próximo à seção de contato pilar/bloco, não havendo interferência da flexão. Após a abertura das primeiras fissuras, o modelo experimental apresenta um aumento brusco e exponencial das deformações, enquanto o modelo numérico apresenta um comportamento linear e praticamente constante, comprovando uma maior rigidez do modelo numérico.

Os extensômetros 15 e 16 apresentam comportamento de compressão durante todo o ensaio. As medidas mostram resultados próximos ao modelo numérico. Observa-se que estes pontos são apresentam comportamentos mais próximos entre os modelos experimental e numérico, se comparados aos outros pontos de monitoração. Isto pode ser explicado pela menor incidência de fissuras na região do pilar e, conseqüentemente, uma menor influência da não linearidade dos materiais. A partir dessas duas curvas é possível verificar que o modelo numérico se deforma menos que o modelo experimental, comprovando maior rigidez do modelo numérico. De forma mais específica, foram analisados os resultados em quatro passos de carga: 33,0%, 66,0% e 100,0% da carga de ruptura (F<sub>u</sub>) e, adicionalmente, o passo de carga relativo à carga de comparação (F<sub>comp</sub>). A Tabela 5 apresenta os resultados das deformações ( $\epsilon$ ) e tensões ( $\sigma$ ) para estes passos de cargas.

A Figura 9 apresenta os valores das tensões para as armaduras de ancoragem do pilar e armaduras do tirante, ambos na carga de comparação (F<sub>comp</sub>). É possível notar a variação ocorrendo nas tensões ao longo da armadura de ancoragem. Nos pontos de monitoração acima da seção de contato pilar/bloco, as tensões são praticamente constan-



**Figura 9**

Distribuição de tensões para as armaduras de ancoragem dos pilares e armaduras do tirante, na carga de comparação, modelos B110P125R2.5 e B110P125R2.5M1

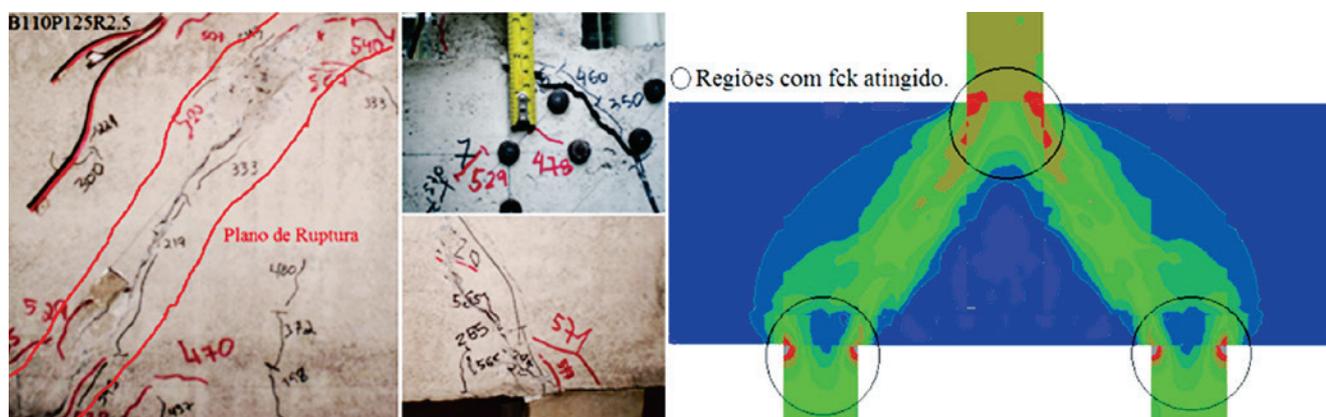
**Tabela 6**

Cargas relativas às aberturas de fissuras dos modelos B110P125R2.5 e B110P125R2.5M1

Modelo	F <sub>u</sub> (kN)	F <sub>f,ip</sub> (kN)	F <sub>f,ip</sub> / F <sub>u</sub> (%)	F <sub>f,i</sub> (kN)	F <sub>f,i</sub> / F <sub>u</sub> (%)	F <sub>f,c</sub> (kN)	F <sub>f,c</sub> / F <sub>u</sub> (%)
B110P125R2.5	577,08	198,00	34,31	220,00	38,12	198,00	34,31
B110P125R2.5M1	585,00	240,00	41,03	240,00	41,03	290,00	49,57



**Figura 10**  
Panorama de fissuração final dos modelos B110P125R2.5 e B110P125R2.5M1



**Figura 11**  
Modos de ruptura dos modelos B110P125R2.5 e B110P125R2.5M1

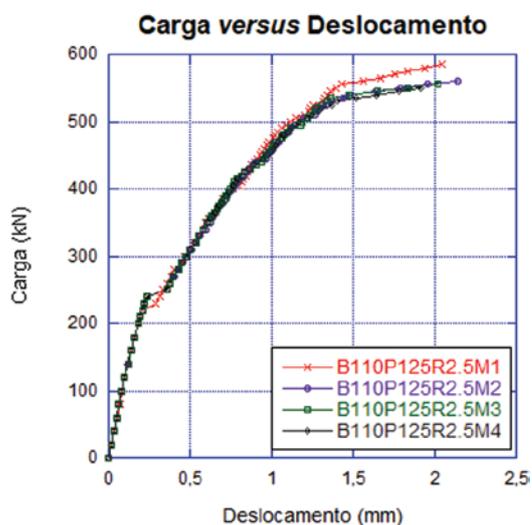
tes e uma diminuição brusca ocorre em pontos inferiores a esta seção.

### 4.3 Panorama de fissuração e modos de ruptura

Segundo Munhoz [1], as primeiras fissuras visíveis surgiram centralizadas, na face inferior do bloco e propagaram até, aproximadamente, metade da altura do bloco, com baixos valores de abertura, portanto, essas fissuras não eram críticas. Posteriormente, surgiram fissuras inclinadas na direção das bielas de compressão, comprovando a existência de fluxo de tensões nessa direção, sendo essas as fissuras que evoluíram para a conformação de planos de ruptura. Outra importante observação é que no nó superior, não surgiram fissuras significativas, comprovando que as tensões de compressão são predominantes. O modelo numérico apresentou características de fissuração próximas aos descritos no modelo experimental.

A Tabela 6 apresenta os resultados das primeiras fissuras, visíveis ( $F_{rp}$ ), centralizadas ( $F_{rc}$ ) e inclinadas ( $F_{ri}$ ) para os modelos B110P125R2.5 e B110P125R2.5M1. Também são apresentadas as relações dessas cargas com a carga de ruptura ( $F_u$ ) de cada modelo. Nota-se que para os modelos experimentais as primeiras fissuras visíveis são centralizadas,  $F_{rp} = F_{rc}$ , porém, as primeiras fissuras inclinadas, na direção das bielas de compressão, ocorrem posteriormente. Para os modelos numéricos, verifica-se que as pri-

meiras fissuras que surgem não são centralizadas, no entanto, ocorrem no mesmo passo de carga que as fissuras inclinadas,  $F_{rp}$



**Figura 12**  
Curva carga versus deslocamento dos modelos numéricos

**Tabela 7**

Cargas de ruptura, cargas de comparação, deslocamentos na carga de comparação e deslocamentos máximos na ruptura, para os modelos numéricos

Modelo	$F_u$ (kN)	$F_{comp}$ (kN)	$F_{u,Mi} / F_{u,M1}$ $i = 1, 2, 3, 4$	$W_{F_{comp}}$ (mm)	$W_{F_{u,teor,Mi}} / W_{F_{u,teor,M1}}$ $i = 1, 2, 3, 4$	$W_{Fu}$ (mm)
<b>B110P125R2.5</b>						
B110P125R2.5M1	585,00	491,83	1,00	1,060	1,00	2,044
B110P125R2.5M2	560,00		0,96	1,118	1,05	2,142
B110P125R2.5M3	555,00		0,95	1,116	1,05	2,022
B110P125R2.5M4	550,00		0,94	1,119	1,06	1,911

$= F_{r,i} \cdot F_{r,c}$ . A Figura 10 apresenta os panoramas finais de fissuração para ambos os modelos. Os panoramas são semelhantes, os modelos apresentaram fissuras na região das armaduras dos tirantes e também na direção das bielas comprimidas.

Ambos os modelos apresentam panoramas semelhantes e verificam-se aberturas de fissuras na direção das bielas comprimidas, comprovando a existência de fluxo de tensões nesta direção. Nota-se também a abertura de fissuras na região da armadura dos tirantes. Relativamente aos modos de ruptura, segundo Munhoz [1], os modelos experimentais apresentaram ruptura do concreto nas regiões dos nós superiores, inferiores, ou em ambos, após surgimento de um plano de ruptura na direção das bielas comprimidas, com intensa fissuração. Os modelos numéricos apresentaram modos de ruptura semelhantes, com a resistência característica

à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) sendo atingida, após intensa fissuração, nas regiões nodais como pode ser verificado na Figura 11. A ruptura dos modelos é influenciada pelo fenômeno de fendilhamento do concreto, explicado pelo surgimento de fissuras paralelas ao fluxo de tensões de compressão nas bielas, oriundas da ação de esforços de tração perpendiculares às bielas.

### 5. Análise paramétrica dos modelos numéricos

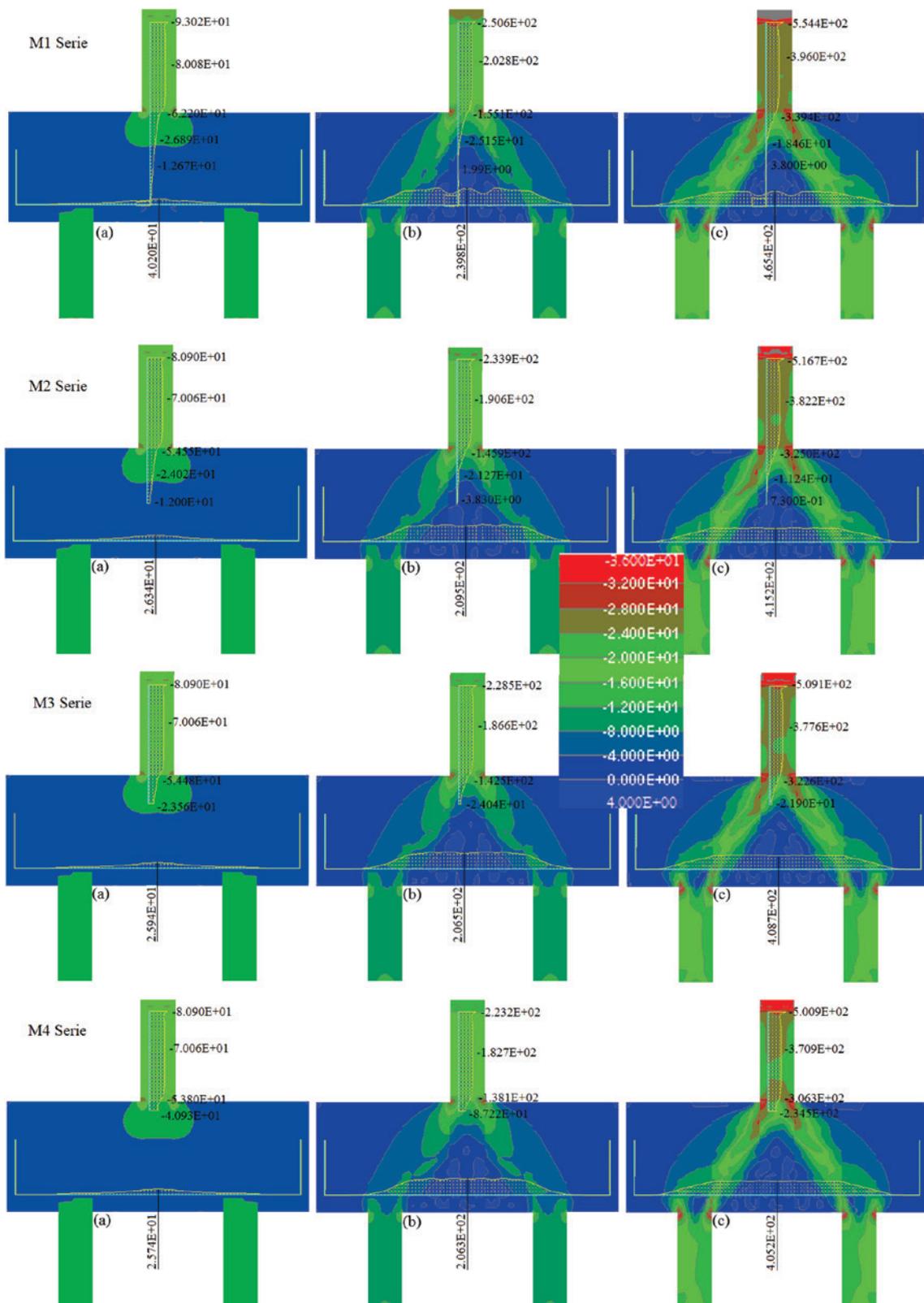
#### 5.1 Curvas carga versus deslocamento e cargas de ruptura

As curvas carga *versus* deslocamento, apresentadas na Figura 12,

**Tabela 8**

Deformações e tensões nas armaduras dos modelos numéricos

Extensômetro	0,33. $F_u$		0,66. $F_u$		$F_{comp}$		$F_u$	
	$\epsilon$ (‰)	$\sigma$ (MPa)						
<b>B110P125R2.5M1</b>								
2	0,203	40,20	1,211	239,80	1,724	341,39	2,350	465,35
13	-0,064	-12,67	0,010	1,99	0,026	5,17	0,019	3,80
14	-0,136	-26,89	-0,127	-25,15	-0,144	-28,50	-0,093	-18,46
15	-0,314	-62,20	-0,783	-155,13	-1,199	-237,43	-1,714	-339,41
16	-0,404	-80,08	-1,024	-202,77	-1,521	-301,19	-2,000	-396,04
<b>B110P125R2.5M2</b>								
2	0,133	26,34	1,058	209,51	1,638	324,36	2,097	415,25
13	-0,061	-12,00	-0,019	-3,83	-0,004	-0,70	0,004	0,73
14	-0,121	-24,02	-0,107	-21,27	-0,086	-17,10	-0,057	-11,24
15	-0,276	-54,55	-0,737	-145,88	-1,207	-239,01	-1,641	-324,95
16	-0,354	-70,06	-0,962	-190,55	-1,521	-301,19	-1,930	-382,18
<b>B110P125R2.5M3</b>								
2	0,131	25,94	1,043	206,53	1,637	324,16	2,064	408,71
13	-	-	-	-	-	-	-	-
14	-0,119	-23,56	-0,121	-24,04	-0,101	-19,90	-0,111	-21,90
15	-0,275	-54,48	-0,719	-142,46	-1,206	-238,81	-1,629	-322,57
16	-0,354	-70,06	-0,942	-186,57	-1,521	-301,19	-1,907	-377,62
<b>B110P125R2.5M4</b>								
2	0,130	25,74	1,042	206,34	1,648	326,34	2,046	405,15
13	-	-	-	-	-	-	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-	-
15	-0,272	-53,80	-0,697	-138,10	-1,194	-236,44	-1,547	-306,34
16	-0,354	-70,06	-0,922	-182,65	-1,521	-301,19	-1,873	-370,89



**Figura 13**

Tensões nas armaduras e fluxos de tensões (em MPa), nos casos (a) - 0,33Fu, (b) - 0,66Fu e (c) - Fu, dos modelos numéricos

consistem nos resultados das cargas externas aplicadas e nas medidas dos deslocamentos verticais na face inferior central dos blocos, simulados numericamente.

A partir da Figura 12, nota-se que as curvas carga *versus* deslocamento dos modelos numéricos alterados (M2, M3 e M4) e do modelo experimental M1 apresentaram comportamentos similares. Os patamares que podem ser visualizados em determinado ponto do ensaio são causados pelo surgimento das primeiras fissuras com abertura significativa, alterando a inclinação da curva em consequência da alteração da rigidez dos modelos.

A Tabela 7 apresenta os valores das cargas de ruptura ( $F_u$ ), das cargas de comparação ( $F_{comp}$ ), dos deslocamentos máximos na ruptura ( $W_{Fu}$ ) e dos deslocamentos na carga de comparação ( $W_{F_{comp}}$ ). São apresentadas as relações,  $F_{u,Mi} / F_{u,M1}$ , entre as cargas de ruptura dos modelos com alterações nos comprimentos das armaduras de ancoragem, M2, M3 e M4, sobre o modelo que simula o modelo experimental, M1. Finalmente, utilizou-se a relação  $W_{F_{comp,Mi}} / W_{F_{comp,M1}}$  para analisar os deslocamentos dos modelos na carga de comparação, sendo os índices M1 e M<sub>i</sub> os mesmos descritos anteriormente.

Em relação às alterações nos comprimentos das armaduras de ancoragem, os modelos alterados (M2, M3, M4) apresentaram resultados próximos à carga de ruptura do modelo experimental (M1). Verifica-se, pela relação  $F_{u,Mi} / F_{u,M1}$  que a diferença entre as cargas de ruptura foi no máximo 6,0%. Portanto, conclui-se que a diminuição no comprimento da ancoragem da armadura não é fator preponderante para a ruptura dos blocos

Estes resultados eram esperados, visto que o comportamento de ruptura dos blocos sobre estacas é por esmagamento do concreto na região dos nós superiores e/ou inferiores, como constatado pelos autores Blénot & Frémy [2], Mautoni [3], Adebar, Kuchma & Collins [12], Buttignol [4] e Delalibera [5]. Segundo os autores, os blocos sobre estacas atingem ruptura do concreto causada pelo surgimento de fissuras coincidentes com o fluxo de tensões de compressão nas bielas, também conhecido por fendilhamento do concreto.

Os deslocamentos máximos ( $W_{Fu}$ ) apresentaram algumas diferenças nos resultados, no entanto, pelas curvas apresentadas, na Figura 12, é possível verificar que os comportamentos ao longo do ensaio apresentaram proximidade..

Para uma melhor comparação, utilizam-se os deslocamentos na

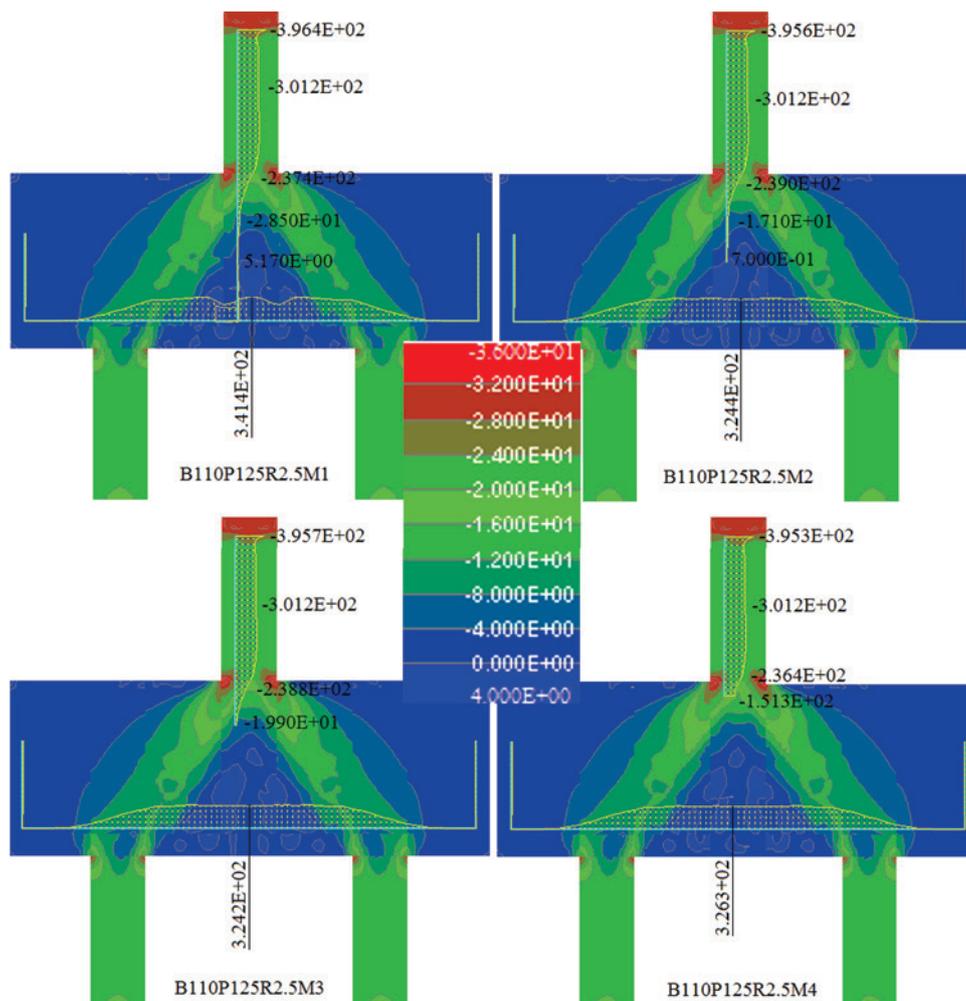


Figura 14

Tensões nas armaduras e fluxos de tensões (em Mpa) dos modelos numéricos, para  $F_{comp}$

**Tabela 9**

Cargas relativas às aberturas de fissuras dos modelos numéricos

Modelo	$F_u$ (kN)	$F_{r,p}$ (kN)	$F_{r,p} / F_u$ (%)	$F_{r,i}$ (kN)	$F_{r,i} / F_u$ (%)	$F_{r,c}$ (kN)	$F_{r,c} / F_u$ (%)
<b>B110P125R2.5</b>							
B110P125R2.5M1	585,00	240,00	41,03	240,00	41,03	290,00	49,57
B110P125R2.5M2	560,00	250,00	44,64	250,00	44,64	-	-
B110P125R2.5M3	555,00	250,00	45,05	250,00	45,05	-	-
B110P125R2.5M4	550,00	250,00	45,45	250,00	45,45	-	-

carga de comparação ( $W_{F_{comp}}$ ). Pelas relações  $W_{F_{comp,Mi}} / W_{F_{comp,M1}}$  verifica-se que os valores dos deslocamentos dos modelos alterados (M2, M3 e M4) não divergem de forma crítica, se comparados ao valor do modelo experimentais (M1).

### 5.2 Deformações e tensões nas armaduras e fluxos de tensões

As posições dos pontos monitorados nas armaduras de ancoragem podem ser visualizadas na Figura 1. Serão apresentados somente parte dos resultados dos pontos de monitoração devido à simetria dos modelos e a proximidade dos resultados.

A Tabela 8 apresenta os resultados das deformações ( $\epsilon$ ) e tensões ( $\sigma$ ), sendo que as tensões foram calculadas pela Lei de Hooke. Para cada extensômetro, apresentam-se as cargas relativas à carga de ruptura ( $F_u$ ), a 66,0% de  $F_u$ , a 33,0% de  $F_u$  e à carga de comparação ( $F_{comp}$ ).

Para facilitar a visualização dos resultados da Tabela 8 alocaram-se os valores nas respectivas posições ao longo das armaduras, apresentados na Figura 13. Os casos (a), (b) e (c) são as tensões nas armaduras e os fluxos de tensões, para  $0,33F_u$ ,  $0,66F_u$  e  $F_u$ , respectivamente.

A partir dos resultados nota-se que para os modelos apresentados, ocorre um decréscimo das deformações e tensões ao longo do comprimento das armaduras de ancoragem dos pilares.

Analisando a Figura 13, verifica-se a brusca diminuição nas tensões ao longo comprimento das armaduras de ancoragem, principalmente na seção de contato pilar/bloco, como discutido por Fusco [11]. A partir das diferentes cargas aplicadas, (a), (b) e (c), nota-se que este fenômeno ocorre tanto para o modelo numérico que simula o modelo experimental (M1) quanto para os modelos com armaduras alteradas (M2, M3 e M4). Com estes resultados conclui-se que os comprimentos de ancoragem dessas armaduras podem ser diminuídos, visto que as tensões se dissipam mais rapidamente do que o previsto.

Verifica-se ainda que os fluxos de tensões seguem o mesmo comportamento para os modelos M1, M2, M3 e M4. A evolução das bielas de compressão é proporcional à evolução da carga aplicada, nota-se que o fluxo de tensões e a propagação das bielas de compressão ocorrem de forma gradual no interior dos blocos. Como observado no caso (a), a conformação das bielas de compressão se inicia no nó superior dos blocos e se propagam até as regiões dos nós inferiores, como pode ser visualizado nos casos (b) e (c). Considerando que as tensões caminham para pontos mais rígidos da estrutura, observa-se que as tensões situadas na região nodal superior (pilar/bloco) seguem o caminho para as regiões nodais in-

feriores (bloco/estaca), pois a rigidez nestes pontos são maiores que no centro do bloco, onde ocorrem maiores deslocamentos. Observando o fluxo de tensões fica evidenciado que as bielas de compressão se formam com uma inclinação característica.

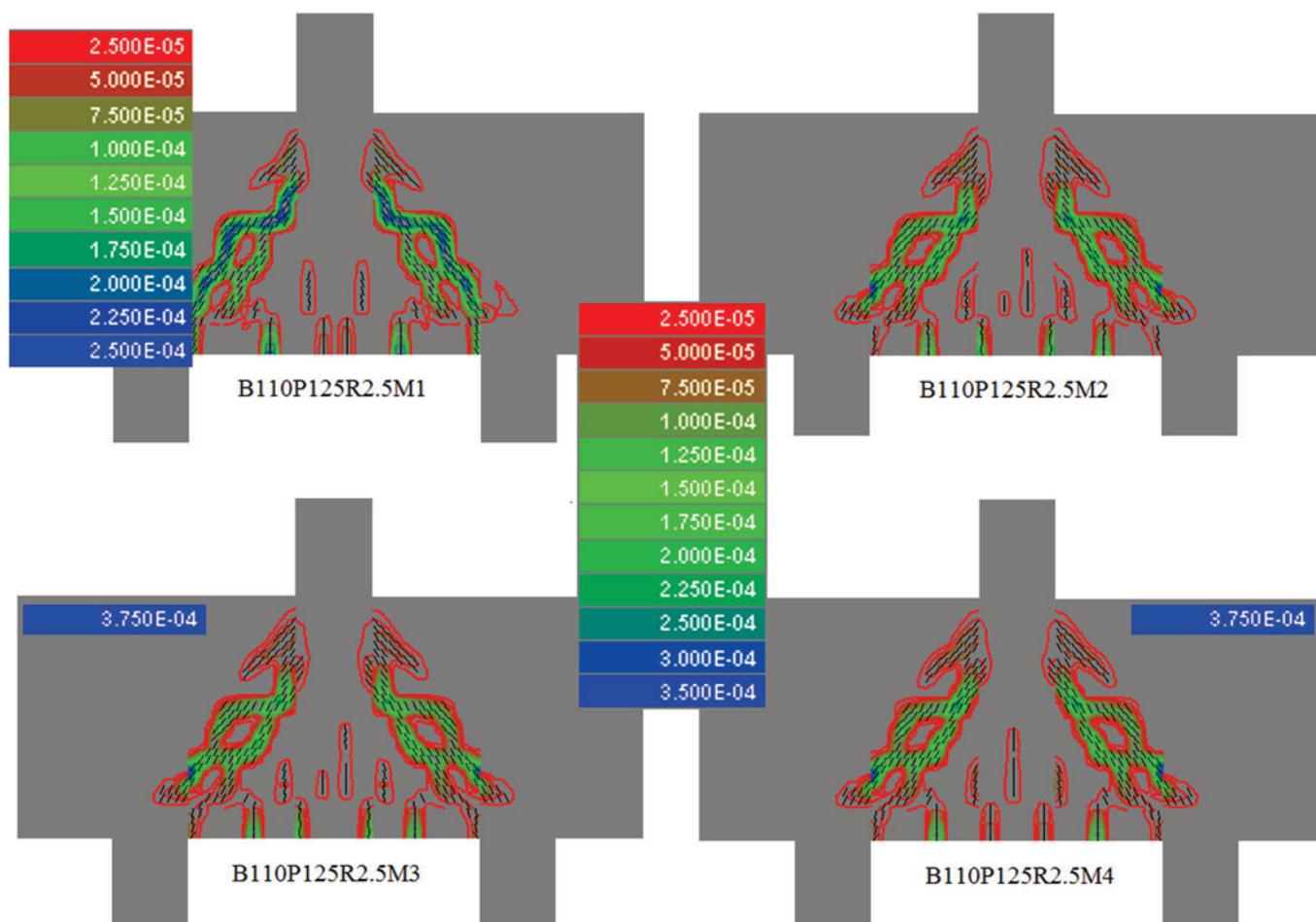
Outra observação notável é que existe uma não uniformidade na distribuição de tensões nas estacas, as regiões internas das estacas (mais próximas ao pilar) são mais solicitadas, corroborando para os estudos de Buttignol [4] e Delalibera [5]. De um modo geral, os modelos de dimensionamento não consideram distribuição não uniforme dessas tensões, sendo usual considerar o equilíbrio no centro das estacas. Para o nó superior, observa-se que o equilíbrio também não pode ser considerado na seção central do pilar, ou seja, a concentração de tensões é maior em regiões descentralizadas ao pilar, como sugerido pelo modelo refinado de Adebar, Kuchma & Collins [12]. Verifica-se também que as bielas de compressão também influenciam positivamente no comportamento das armaduras dispostas sobre a cabeça das estacas, pois se observa um decréscimo brusco das deformações e tensões na região do nó inferior.

Para uma comparação mais consistente do comportamento dos blocos com diferentes comprimentos de armadura de ancoragem (M1, M2, M3 e M4), apresentam-se na Figura 14, os resultados nas cargas de comparação ( $F_{comp}$ ), ou seja, com um carregamento de 491,83 kN para todos os modelos.

A Figura 14 mostra que para uma mesma carga aplicada ( $F_{comp}$ ), os modelos com diferentes comprimentos de armadura de ancoragem apresentaram comportamentos semelhantes, relativamente às tensões nas armaduras e aos fluxos de tensões, concluindo que essas alterações nas armaduras não influenciam de maneira significativa os modelos.

De uma maneira geral, para os modelos apresentados, nota-se que nos pontos de monitoração localizados na região dos pilares, as deformações e tensões são praticamente constantes e o decréscimo ocorre em pontos inferiores à seção de contato pilar/bloco. Este fenômeno é causado por uma influência positiva das bielas de compressão que se formam na região nodal superior do bloco. A ocorrência de tensões de compressões nesta região colabora para uma ação confinante do concreto sobre o aço, melhorando o contato entre os materiais, aumentando a aderência entre ambos e, conseqüentemente, dissipando as tensões nas armaduras mais rapidamente, em seções não tão profundas das armaduras de ancoragem. Verifica-se ainda que em regiões próximas aos pontos de monitoramento mais inferiores, aproximadamente 20,0 cm abaixo da face do bloco, as tensões mostram-se praticamente nulas.

A partir dessas observações conclui-se que a ancoragem necessária para transferência de forças entre pilar e bloco é um valor



**Figura 15**

Panoramas de fissuração dos modelos numéricos, para carga de comparação ( $F_{comp}$ )

menor do que os valores dimensionados e detalhados usualmente em projetos estruturais de concreto armado. É importante observar que as tensões nas armaduras se dissipam ao longo da aplicação da carga, como discutido por Fusco [11]. No entanto, os modelos de dimensionamento de blocos sobre estacas não consideram esses fenômenos.

### 5.3 Panorama de fissuração e modos de ruptura

Na Tabela 9 são apresentados os resultados relativos às cargas das primeiras fissuras, visíveis ( $F_{rp}$ ), centralizadas ( $F_{rc}$ ) e inclinadas ( $F_{ri}$ ) na região da face inferior dos blocos. Também são apresentadas as relações dessas cargas com as cargas de ruptura ( $F_u$ ).

Ao compararmos as relações  $F_{rp}/F_u$  e  $F_{ri}/F_u$ , ao longo do comprimento das armaduras de ancoragem dos modelos modificados (M1, M2, M3 e M4), verifica-se que os resultados não apresentaram variações acima de 5,0%. Portanto, conclui-se que as variações nos comprimentos das armaduras de ancoragem não é fator preponderante para o surgimento de fissuras nos blocos, pois os modelos apresentaram comportamentos similares.

Como os diversos modelos numéricos alcançaram a ruptura em

passos de carga diferentes, a comparação entre resultados fica inviável para a carga de ruptura ( $F_u$ ). Assim, serão utilizadas a carga de comparação ( $F_{comp}$ ), 491,83 kN. As magnitudes das fissuras são dadas nas escalas de cores, com a abertura em metros e apresentadas na Figura 15.

Observando as figuras notam-se comportamentos semelhantes, as fissuras se concentram basicamente em três regiões distintas. A primeira é na região inferior dos blocos, partindo da face inferior do bloco e progredindo linearmente para cima, na direção vertical, no entanto, nota-se que essas fissuras possuem baixa magnitude de aberturas (como verificado na escala de cores) e não alcançam a metade da altura dos blocos, sendo causadas por flexão. A segunda região também se localiza na porção inferior do bloco, no entanto, não se iniciam e não alcançam a região mais inferior dos blocos e também possuem baixa magnitude de aberturas, em alguns casos essas fissuras podem se juntar às fissuras causadas pela flexão. A terceira região é relativa às fissuras que surgem inclinadas, na direção das bielas comprimidas, e são as fissuras que apresentam maior magnitude de abertura, formando planos de ruptura que se estendem da região do nó inferior, próximos às estacas, até a região do nó superior, próximos ao pilar.

Em relação às alterações no comprimento das armaduras de ancoragem dos pilares, verifica-se que os panoramas de fissuração dos modelos, M1, M2, M3 e M4, sofrem poucas alterações. A principal alteração nos panoramas de fissuração dos modelos é na magnitude das fissuras, nas quais, é possível verificar que os blocos com comprimento de ancoragem menores, no geral, apresentam fissuras com maiores aberturas. Assim, conclui-se que a diminuição no comprimento dessas armaduras, tornam os blocos sobre duas estacas mais suscetíveis à abertura de fissuras, no entanto, os resultados não apresentaram disparidades nos comportamentos.

Relativamente aos modos de ruptura, todos os modelos apresentaram ruína do concreto nos nós superiores e/ou inferiores. Após intensa fissuração nas direções inclinadas, surgiram planos de ruptura nas direções das bielas comprimidas e, posteriormente, a resistência à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) foi atingida. A ruptura dos modelos é influenciada pelo fenômeno de fendilhamento, ou seja, surgimento de fissuras paralelas ao fluxo de tensões de compressão nas bielas, oriundas da ação de esforços de tração perpendiculares às bielas. Os modos de ruptura dos modelos apresentados estão de acordo ao discutido no item 4.3.

## 6. Conclusões

O objetivo principal desta pesquisa foi estudar a influência do comprimento da armadura de ancoragem dos pilares em blocos sobre duas estacas. Para isto, foram simulados numericamente blocos a partir de um modelo experimental de referência, com auxílio de um programa computacional baseado no Método dos Elementos Finitos e considerando a não linearidade dos materiais. Os comportamentos dos blocos foram analisados parametricamente, variando os comprimentos de ancoragem dos pilares em 34,0 cm, 20,0 cm, 10,0 cm e 3,0 cm. Os resultados analisados foram relativos às curvas carga *versus* deslocamento, às cargas de ruptura, às deformações e tensões nas armaduras, aos fluxos de tensões, aos panoramas de fissuração e aos modos de ruptura.

Os resultados numéricos apresentaram concordância com o comportamento dos modelos experimentais de referência, gerando resultados qualitativamente positivos. Alguns resultados apresentaram pequenas disparidades, causados principalmente pelas diferenças de rigidezes entre os modelos. Os modelos numéricos apresentam-se mais rígidos que os modelos experimentais, fato também verificado por Buttignol [4] e Delalibera [5].

Uma constatação importante sobre a rigidez dos modelos é que além dos três motivos citados por Delalibera [5] para explicar a maior rigidez dos modelos numéricos, notou-se que os parâmetros utilizados nos elementos de interface, que simulam o contato do concreto com o aço das chapas, influem na rigidez final do elemento.

Considerando as análises numéricas, observa-se que os blocos simulados apresentaram comportamentos semelhantes para os mecanismos de funcionamento interno desses elementos. Observando os fluxos de tensões, os modos de ruptura e os panoramas de fissuração, nota-se que os resultados foram similares.

No âmbito da análise numérica paramétrica, os blocos apresentaram poucas modificações comportamentais após as alterações nos comprimentos das armaduras de ancoragem. As cargas de

ruptura ( $F_u$ ) pouco alteraram com essas modificações e estes resultados eram esperados, visto que a ruptura dos blocos sobre estacas é por esmagamento do concreto nas regiões nodais após o surgimento de fissuras, coincidentes com o fluxo de tensões das bielas, também conhecido por fendilhamento do concreto.

Quanto às deformações e tensões nas armaduras de ancoragem dos pilares, verificou-se um decréscimo brusco nos seus valores, principalmente na região da seção de contato entre pilar/bloco, onde são conformadas as bielas de compressão. Esse fenômeno foi observado em todos os modelos analisados nesta pesquisa, tanto nos simulados numericamente quanto para o experimental, oriundo da pesquisa de Munhoz [1]. A rápida dissipação destas tensões é explicada por uma influência positiva das tensões de compressão que se formam na região nodal superior do bloco, ou seja, a ação confinante das bielas de compressão colabora na transferência das tensões das armaduras para o concreto.

Conclui-se a partir da análise numérica paramétrica que as alterações nos comprimentos das armaduras de ancoragem não influenciaram de maneira significativa os comportamentos dos modelos, ou seja, esses comprimentos não são fatores preponderantes para os mecanismos de funcionamento dos blocos sobre duas estacas.

## 7. Agradecimentos

À Agência da CAPES pelo apoio e fomento que tornou possível esta publicação. E também à Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da UNICAMP, assim como ao Departamento de Estruturas e seus professores pelo apoio dado e pela disponibilização das ferramentas e programas computacionais que viabilizaram esta pesquisa.

## 8. Referências bibliográficas

- [1] MUNHOZ, F. S. Experimental and numerical analysis of rigid two-pile caps with square and rectangular column and different rates of column reinforcement. Thesis (Doctored). São Carlos School of Engineering, University of São Paulo. São Carlos, Brazil, 2014. (in Portuguese).
- [2] BLÉVOT, J. L.; FRÉMY, R. Semelles sur pleux. Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. Paris, France, 1967. (in French).
- [3] MAUTONI, M. Bloco sobre dois apoios. Grêmio Politécnico. São Paulo, Brasil, 1972.
- [4] BUTTIGNOL, T.E.T. Computational Analysis of Pile Caps. Master Dissertation. School of Civil Engineering, Architecture and Urbanism, University of Campinas. Campinas, Brazil, 2011. (in Portuguese).
- [5] DELALIBERA, R. G. Numerical and experimental analysis of two pile caps submitted to the action of a load centered and eccentric. Thesis (Doctored). São Carlos School of Engineering, University of São Paulo. São Carlos, Brazil, 2006. (in Portuguese).
- [6] MIGUEL, G. M. Numerical and experimental analysis of three-pile caps. Thesis (Doctored). São Carlos School of Engineering, University of São Paulo. São Carlos, Brazil, 2000. (in Portuguese).

- [7] ACI COMMITTEE 318 ON STANDARD BUILDING CODE. Building code requirements for structural concrete - ACI 318R-14, American Concrete Institute, 2014.
- [8] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB/FIP MODEL CODE MC-2010 – Design code. International Federation for Structural Concrete, 2010.
- [9] BRAZILIAN ASSOCIATION STANDARDS. NBR 6118:2014 – Design of concrete structures. Rio de Janeiro, Brazil, 2014. (in Portuguese).
- [10] CERVENKA, V; JENDELE, L. e CERVENKA, J. ATENA Program Documentation - Part 1: Theory. Prague, Czech Republic, 2015.
- [11] FUSCO, P.B. Técnicas de armar as estruturas de concreto. Editora PINI Ltda. São Paulo, Brasil, 1994.
- [12] ADEBAR, P.; KUCHMA, D.; COLLINS, M. P.. Strut-and-tie models for design of pile caps: an experimental study. ACI Journal, v. 87, Jan/Feb-1990; p. 81-91.