

# Numerical analysis of the effective stiffness of elastomeric bearing pads under precast beams for the limit load of lateral instability

## *Análise numérica da variação da rigidez efetiva de almofadas elastoméricas sob vigas pré-moldadas para a carga limite de instabilidade lateral*



L. C. REIS <sup>a</sup>  
[leandroreis.engcivil@gmail.com](mailto:leandroreis.engcivil@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-5124-3112>

P. A. KRAHL <sup>b</sup>  
[pablokrahl@usp.br](mailto:pablokrahl@usp.br)  
<https://orcid.org/0000-0002-6172-5481>

M. C. V. LIMA <sup>a</sup>  
[macris@ufu.br](mailto:macris@ufu.br)  
<https://orcid.org/0000-0001-9641-474X>

### Abstract

Precast concrete girders on bearing pads are subjected to instability depending on several variables such as span length, initial imperfections and bearing pads behavior. On this paper, numerical models are developed in order to assess the instability limit loads and the rotational stiffnesses of the pads in many combinations of span length, cross section of the girder and lateral sweep. The lift off phenomenon is considered in each analysis by a bearing pad model composed by springs with compression only behavior, with good results in comparison with the experimental values of the technical literature. The increase in spans and initial imperfections causes a decrease in the rollover limit load. The lift off effect is aggravated as the lateral eccentricities increase. In the analyzed combinations, the reduction of the rotational stiffness is about 37% for the critical situation, which span length about 40 m and lateral sweep of L/300, with loss of contact between 50% and 60%.

**Keywords:** lateral instability, rollover, elastomeric bearing pads, precast concrete girders.

### Resumo

Vigas de concreto pré-moldado apoiadas sobre almofadas de apoio estão sujeitas a falhas por instabilidade lateral que dependem de vários fatores, entre eles o vão da viga, as imperfeições iniciais e as condições das almofadas de apoio. Neste trabalho, desenvolveu-se modelos numéricos de vigas sobre almofadas, de forma a avaliar as cargas limite de instabilidade e a rigidez efetiva à rotação das almofadas em várias combinações de vão, seção da viga e excentricidade lateral. O levantamento da viga sobre os apoios é considerado em cada análise por meio de um modelo de almofada composto por molas com comportamento somente à compressão, com resultados satisfatórios comparados a respostas experimentais da literatura técnica. O aumento nos vãos e nas imperfeições iniciais reduzem a força limite de tombamento. O levantamento da viga sobre as almofadas é agravado conforme aumentam-se as excentricidades laterais. Nos casos analisados, a diminuição da rigidez ao giro é em torno de 37% para a situação mais crítica, com vão L de 40 m e excentricidade de L/300, com perda de contato variando entre 50% e 60%.

**Palavras-chave:** instabilidade lateral, tombamento, almofadas de apoio elastoméricas, vigas pré-moldadas.

<sup>a</sup> Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Civil, Uberlândia, MG, Brasil

<sup>b</sup> Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Campinas, SP, Brasil.

## 1. Introdução

Existem diversos registros recentes sobre colapso de vigas pré-moldadas simplesmente apoiadas em almofadas de neoprene (OESTERLE et al. [1]; BAIRÁN; CLADERA [2]). A rigidez do aparelho de apoio, a esbelteza da viga, deformações provenientes de efeito térmico, retração e fluência podem influenciar isoladamente ou de maneira combinada na capacidade destes elementos estruturais em resistir ao tombamento durante esta fase construtiva. Apesar do alto risco à segurança dos operários e do elevado prejuízo causado por esse tipo de colapso, existem poucas pesquisas experimentais desenvolvidas sobre o assunto (CONSOLAZIO; HAMILTON; BEERY [3], HURFF; KAHN [4]). Consequentemente, poucos estudos numéricos foram realizados para representar o comportamento de vigas longas durante o tombamento quando somente apoiadas em almofadas de neoprene (KRAHL; CARRAZEDO; EL DEBS [5]; LEE [6]; CARDOSO; LIMA [7]). Portanto, este campo de pesquisa requer mais investigação em âmbito experimental, assim como numérico, para que recomendações possam ser estabelecidas. Ressalta-se aqui, diante de diversos acidentes que vêm sendo registrados, até o momento, não existe nenhum código normativo que estabeleça recomendações para este estágio construtivo.

Neste contexto, este estudo visa analisar numericamente a variação da rigidez efetiva de almofadas elastoméricas sob vigas pré-moldadas para a carga limite de instabilidade lateral. Para este fim, são consideradas como principais variáveis o comprimento da viga, a geometria da seção transversal, os efeitos das imperfeições laterais iniciais (excentricidade), bem como as características das almofadas elastoméricas de apoio.

## 2. Análise numérica em elementos finitos

Análises numéricas são realizadas para determinar a rigidez efetiva da interação entre aparelhos de apoio elastomérico e vigas pré-moldadas durante o tombamento. Os modelos das almofadas

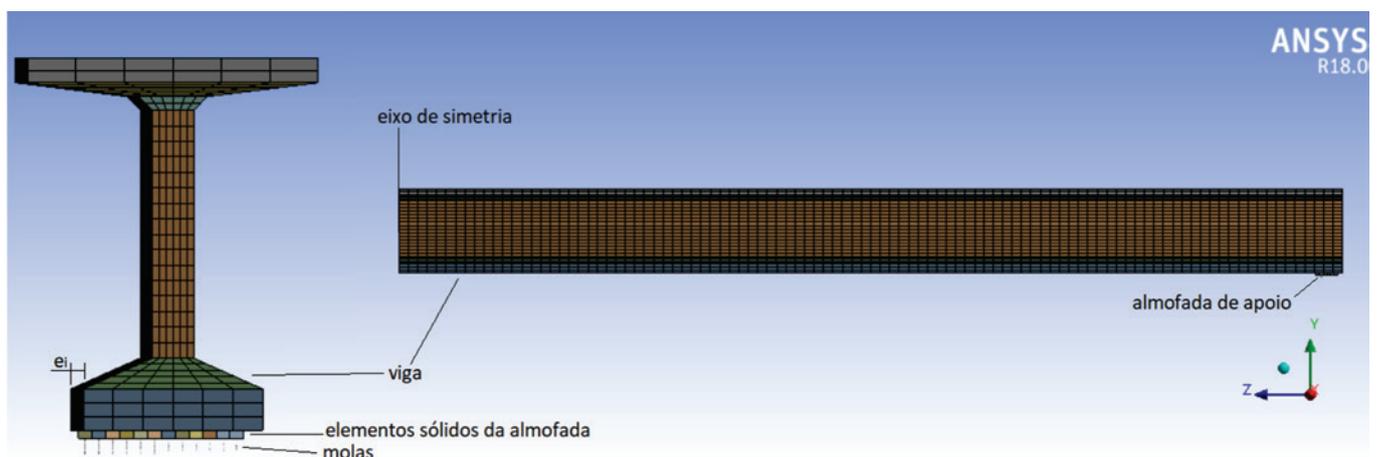
e das vigas são validados por ensaios experimentais encontrados na literatura. Além disso, são feitas análises paramétricas para avaliar o comportamento do sistema viga-almofada considerando a variação de parâmetros geométricos como vão e seção das vigas e imperfeições geométricas.

As análises numéricas desenvolvidas neste trabalho são realizadas através do programa computacional ANSYS, utilizando elementos sólidos para as vigas e sólidos e molas para os aparelhos de apoio. Nos estudos experimentais reportados na literatura há indícios de que o tombamento ocorre antes da fissuração do concreto (HURFF [8], CONSOLAZIO; HAMILTON; BEERY [3]). Portanto, é adotado o comportamento elástico linear para o concreto, cuja modelagem é feita com elementos sólidos. Para descrever os grandes deslocamentos e rotações que normalmente ocorrem em elementos muito esbeltos é considerada nas análises a não-linearidade geométrica. Para solução do problema não-linear é considerado a estratégia numérica de Newton-Raphson. Para as almofadas de apoio é considerada a hipótese de possível perda de contato com a viga (lift off). As almofadas são modeladas com elementos sólidos apoiados em molas.

### 2.1 Elementos finitos e condições de contorno

A viga é discretizada em elementos sólidos de alta ordem (SOLID186) com 20 nós e três graus de liberdade por nó referente à translação. A escolha da malha considerada representativa para o desenvolvimento do trabalho considera a variação do deslocamento vertical e lateral no meio do vão, com margem de erro nos deslocamentos medidos em torno de 0,3% para os refinamentos de malha testados. A modelagem da viga sobre aparelho de apoio nas extremidades é desenvolvida considerando a simetria do problema (Figura 1). Na direção longitudinal a viga foi dividida em 100 elementos de aproximadamente 150 mm.

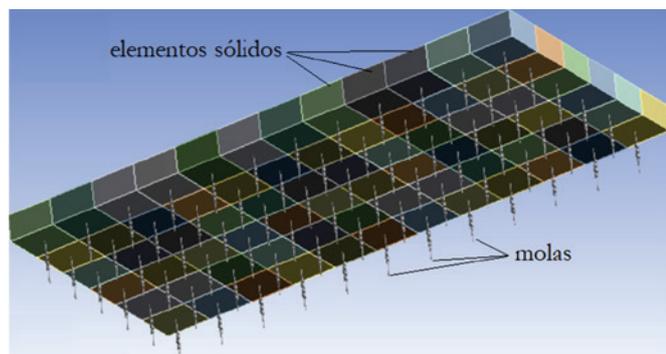
A almofada de apoio foi simulada computacionalmente com elementos sólidos (SOLID186) e molas (COMBIN14) com rigidez longitudinal, comportamento linear e exclusivo de compressão, a



**Figura 1**

Seção transversal da viga sobre almofada no apoio e discretização longitudinal com simetria

Fonte: Autores (2018)



**Figura 2**  
Modelo das almofadas de apoio

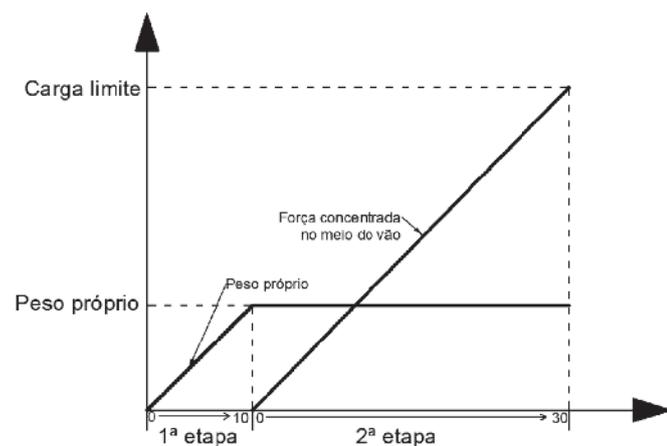
Fonte: Autores (2018)

fim de representar o comportamento proposto por Harper e Consolazio [9] que é descrito na Seção 2.3 deste trabalho (Figura 2).

## 2.2 Aplicação do carregamento e determinação da carga limite

Em todas as análises desenvolvidas é aplicado primeiramente o peso próprio da viga em 10 passos de carga. Para os casos de calibração, comparação com resultados experimentais da literatura técnica, é aplicada uma força concentrada no meio do vão (HURFF [8]) e cargas concentradas nos terços médios (CONSOLAZIO; HAMILTON; BEERY [3]). Para a análise paramétrica desenvolvida, após a ação do peso-próprio (situação inicial), é aplicada uma força concentrada no meio do vão (situação limite) para obter a carga limite de tombamento (Figura 3).

A carga limite é definida através da curva de força aplicada  $\times$  deslocamento lateral no meio do vão, conforme Consolazio, Hamilton e Beery [3]. Com esse critério, adota-se como carga limite de tombamento o ponto onde a inclinação da tangente à curva força-deslocamento é 1/10 da rigidez inicial (Figura 4).



**Figura 3**  
Esquema de aplicação do carregamento nas análises paramétricas

Fonte: Autores (2018)

## 2.3 Modelagem das almofadas de apoio

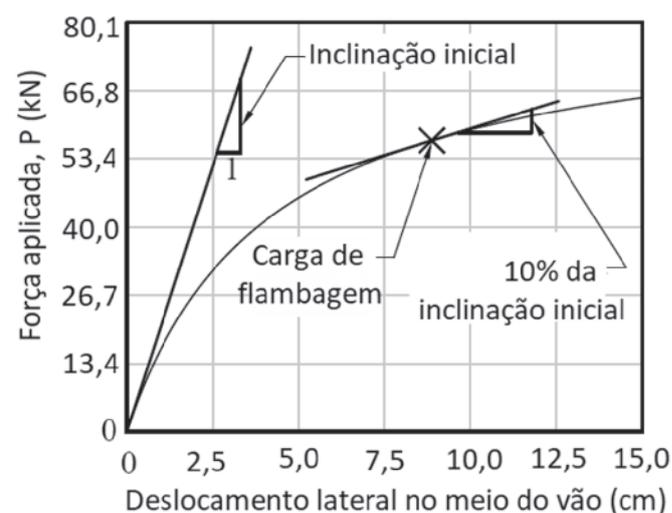
Nesta seção é tratada a simulação das almofadas de dimensões  $609,6 \times 279,4$  mm, com 48,4 mm de altura e 3 chapas internas de aço (tipo A) e de dimensões  $609,6 \times 355,6$  mm, com 65,0 mm de altura e 4 chapas internas de aço (tipo B). Para análise do comportamento numérico das almofadas são modeladas as vigas ensaiadas por Consolazio, Hamilton e Beery [3] e Hurff [8] apoiadas sobre as almofadas tipo A e B, respectivamente.

Nas análises de estabilidade, deve-se conhecer, principalmente, as rigidezes à compressão e à rotação das almofadas de apoio. Para viga apoiada sobre almofadas de apoio, o afundamento da almofada depende da rigidez à compressão que ocorre sob o peso da viga. Por outro lado, a rotação da almofada e o efeito de levantamento da borda menos comprimida (*lift off*) depende do nível de compressão da mesma.

Com base em estudos experimentais, para a estimativa da rigidez a rotação do aparelho de apoio, Harper e Consolazio [9] sugeriram o uso do modelo de grelha simplificado, que divide a almofada em regiões retangulares discretas e modela cada região com uma mola que representa a contribuição da rigidez dessa região. São utilizadas molas sujeitas apenas a compressão para simular o levantamento da borda menos comprimida. Os nós superiores das molas estão ligados entre si em um corpo rígido que representa a superfície superior da almofada.

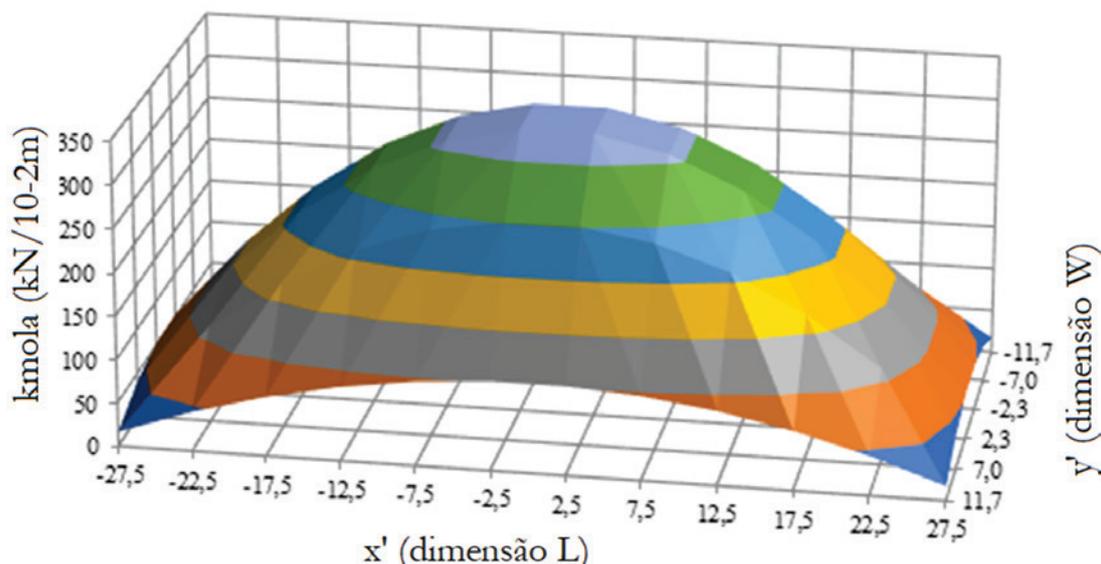
A variação na rigidez e o comportamento exclusivo à compressão das molas, sem reações de apoio sob tração, permite de forma simplificada representar o comportamento não-linear da almofada de apoio. A Figura 5 mostra a variação da rigidez da mola em função de sua posição na almofada, sendo a região central da almofada a responsável por absorver a maior parcela da sollicitação devido ao efeito de confinamento.

Nas análises paramétricas realizadas neste trabalho é considerada a almofada ensaiada por Hurff [8], sendo a rigidez à compressão obtida experimentalmente no valor de 1042 kN/mm. Com a



**Figura 4**  
Definição da carga limite

Fonte: Adaptado de Consolazio, Hamilton e Beery [3]



**Figura 5**

Distribuição de rigidez das molas em função da posição de contribuição na almofada

Fonte: Cardoso [10]

rigidez à compressão da almofada, são calculadas as rigidezes longitudinais à compressão de cada mola, que leva em conta a ponderação de rigidez dada pela posição da mola na área da almofada (Equação 1).

$$k_{mola}(x',y') = A_{região} \cdot \left( \frac{k_{almofada}}{A_{almofada}} \right) \cdot [1 - (x')^2] \cdot [1 - (y')^2] \quad (1)$$

em que  $k_{mola}(x',y')$  é o valor de rigidez da mola;  $A_{região}$  é a área da região da mola;  $k_{almofada}$  é a rigidez à compressão da almofada e  $A_{almofada}$  é a área da almofada e  $x'$  e  $y'$  são as coordenadas normalizadas da almofada.

### 3. Cálculo da rigidez efetiva das almofadas

A rigidez ao giro é importante na avaliação da instabilidade lateral das vigas, quando a única restrição ao giro é fornecida pelas almofadas de apoio. São feitas análises da variação da rigidez das almofadas, decorrentes da perda de contato entre a viga e a almofada, considerando a aplicação da força concentrada no meio do vão. Também é avaliado o efeito do aumento da excentricidade lateral inicial da viga no meio do vão na variação da rigidez ao giro das almofadas.

A rigidez efetiva ao giro é determinada pela Equação 2, sendo  $K_0$  é a rigidez ao giro da almofada;  $M$  é o momento em torno do eixo considerado; e  $\theta$  é a rotação da almofada.

$$K_{\theta} = \frac{M}{\theta} \quad (2)$$

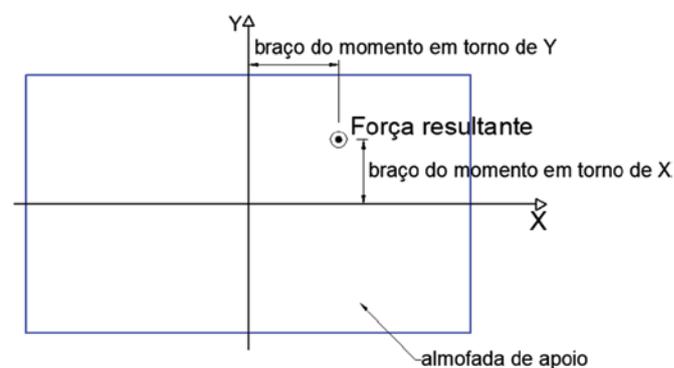
O momento é determinado multiplicando-se a força resultante (peso próprio e força concentrada) na almofada pela excentricidade devido ao carregamento não uniforme da almofada. A Figura 6 mostra os braços de alavanca de momento para determinação dos momentos em torno dos eixos X e Y adotados. A rotação é determinada pelo modelo numérico, dividindo-se o alongamento

das molas em duas extremidades pela distância entre si. Com as demais variáveis determinadas, calcula-se a rigidez ao giro da almofada. A rigidez que associada a estabilidade lateral das vigas é a referente ao giro em torno do eixo Y.

A posição da força aplicada em relação ao centro da almofada é determinada multiplicando-se a contribuição de cada mola pela sua distância em relação ao eixo considerado e, posteriormente, dividindo o valor obtido pela força resultante total.

### 4. Calibração do modelo numérico

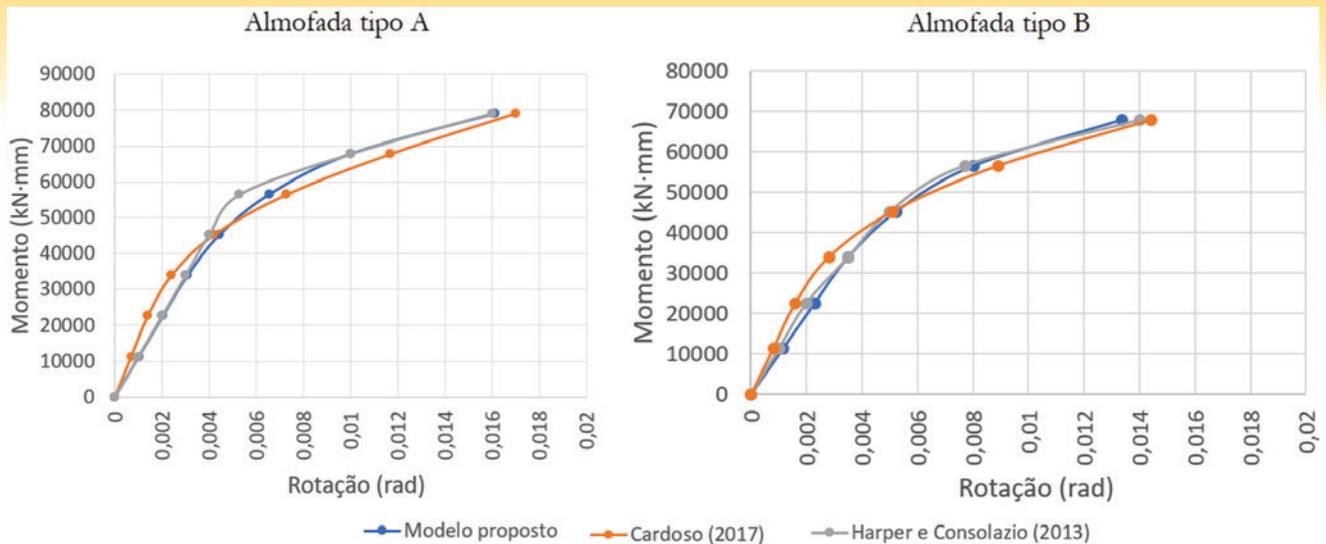
Nessa seção são apresentados os resultados da calibração do modelo da almofada de apoio e do modelo composto pela viga apoiada sobre as almofadas. Os modelos foram validados por ensaios experimentais e numéricos encontrados na literatura técnica.



**Figura 6**

Esquema para determinação dos momentos

Fonte: Autores (2018)



**Figura 7**  
 Comparação do comportamento momento-rotação das almofadas tipo A e B  
 Fonte: Autores (2018)

#### 4.1 Calibração da almofada

A Figura 7 mostra as curvas de momento  $\times$  rotação obtidas experimentalmente por Harper e Consolazio [9] comparadas com os resultados do modelo proposto neste trabalho e os resultados numéricos de Cardoso [10].

O modelo proposto forneceu resultados bastante próximos às curvas obtidas pelo modelo de Harper e Consolazio [9] e para as curvas de Cardoso [10], lembrando que as curvas de Harper e Consolazio [9] foram comparadas às curvas experimentais obtidas pelos próprios autores, o que valida as curvas do modelo proposto pelo presente estudo.

A principal diferença entre o modelo proposto neste trabalho com o modelo de Harper e Consolazio [9] é que no primeiro são utilizados elementos sólidos para unir as molas e no segundo são

utilizados elementos de barra para fazer esta união. A vantagem de utilizar elementos sólidos é que o contato entre a viga e a almofada é feito pelas faces dos elementos que os compõe, evitando a necessidade de coincidir os nós da almofada com os nós da viga para efetuar a ligação entre eles. Portanto, o modelo proposto é capaz de representar numericamente a perda de contato entre a viga e a almofada durante o tombamento.

#### 4.2 Calibração do conjunto viga-almofada

O modelo numérico não-linear proposto é calibrado com base na comparação com os dois resultados experimentais disponíveis na literatura, no caso a viga BT-54 ensaiada por Hurff [8] e a viga BT-78 ensaiada por Consolazio, Hamilton e Beery [3].

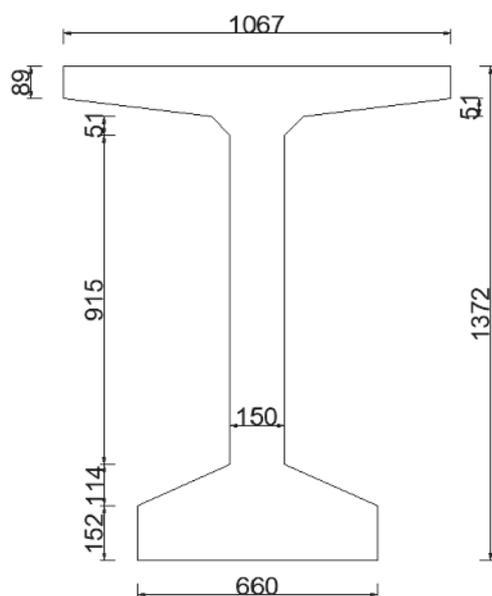
##### 4.2.1 Viga ensaiada por Hurff [8]

A viga ensaiada por Hurff [8] tem 30,5 m de vão e é apoiada sobre as almofadas de apoio de elastômero do tipo B. No ensaio experimental, dois carregamentos são aplicados: o peso próprio da viga e uma força concentrada aplicada no meio do vão. A Figura 8 mostra a seção transversal da viga.

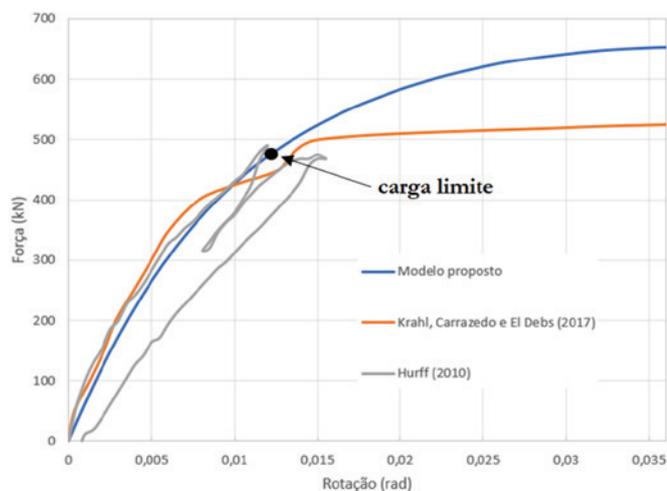
A rigidez vertical total da almofada fornecida por Hurff [8] é de 1042 kN/mm. Com isso, as rigidezes à compressão de cada mola componente da almofada foram obtidas pela Equação [1]. Para o concreto, adotou-se comportamento elástico linear, com módulo de elasticidade de 30,8 GPa e coeficiente de Poisson de 0,22. Hurff [8] mediu a excentricidade lateral inicial da viga no meio do vão, sendo o valor de 43,5 mm.

A Figura 9 apresenta a comparação dos resultados experimentais de Hurff [8] ao modelo numérico proposto e aos resultados numéricos de Krahl, Carrazedo e El Debs [5].

Pela Figura 9, pode-se observar que a rigidez inicial do sistema viga-aparelhos de apoio é bastante similar. Uma vez obtida a curva força-deslocamento, segundo o critério de Consolazio, Hamilton e Beery [3], obtém-se, para a relação 1/10 da inclinação inicial (Figura 4), uma carga limite de aproximadamente 484,0 kN. Esta, em comparação aos valores de Hurff [8] (463,0 kN) e Krahl, Carrazedo e El Debs [5] (503,3 kN), resulta em diferenças de 4,5% e 3,8%, respectivamente.



**Figura 8**  
 Seção da viga PCI BT-54 (dimensões em mm)  
 Fonte: Hurff [8]



**Figura 9**  
Curva Força x Rotação viga BT-54

Fonte: Autores (2018)

A Figura 10 mostra a perda de contato que ocorre com a aplicação do peso próprio, antes da aplicação da força concentrada no meio do vão, e a perda de contato com a aplicação da carga limite. Observa-se que, para a situação inicial, a perda de contato é de 25% e, na situação limite, houve um incremento no levantamento de 11%.

#### 4.2.2 Viga ensaiada por Consolazio, Hamilton e Beery [3]

A viga ensaiada por Consolazio, Hamilton e Beery [3] é modelada e obtidos os valores de carga limite de instabilidade e de deslocamento lateral no meio do vão. A viga possui vão de 31,11 m e é apoiada sobre almofadas de apoio de elastômero do tipo A. A seção transversal da viga é mostrada na Figura 11.

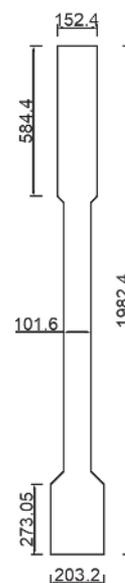
Os carregamentos aplicados tratam-se do peso próprio e de duas forças concentradas aplicadas nos terços do vão. Para o concreto, adotou-se o comportamento elástico linear, sendo o módulo de elasticidade de 35,4 GPa e coeficiente de Poisson de 0,25.

A curva de força aplicada x deslocamento lateral no meio do vão apresentada na Figura 12 contém a resposta numérica obtida neste trabalho e a curva experimental de Consolazio, Hamilton e Beery [3]. Considerando a carga limite como o ponto onde a inclinação da reta tangente é igual a 1/10 da inclinação inicial, obtém-se um



**Figura 10**  
Perda de contato com aplicação do peso próprio e da carga limite

Fonte: Autores (2018)



**Figura 11**  
Seção transversal da viga (dimensões em mm)

Fonte: Adaptado de Consolazio, Hamilton e Beery [3]

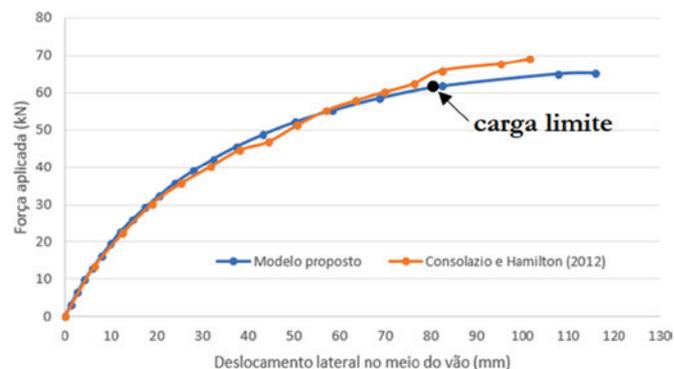
valor de carga limite de 61,5 kN, sendo o valor experimental de Consolazio, Hamilton e Beery [3] igual a 68,5 kN (diferença de 10,2%).

A Figura 13 mostra a perda de contato nas situações inicial e limite. Na situação inicial, a perda de contato com a aplicação do peso próprio é de 13% e a perda de contato na situação limite é de 46%, ou seja, houve um aumento de 33% no levantamento.

Devido à elevada esbelteza e ao lift-off, a viga ensaiada apresenta desde o início do carregamento um comportamento não-linear. Portanto, o modelo proposto representou com precisão as não-linearidades geométrica e de perda de contato entre a viga e a almofada que ocorrem durante o tombamento.

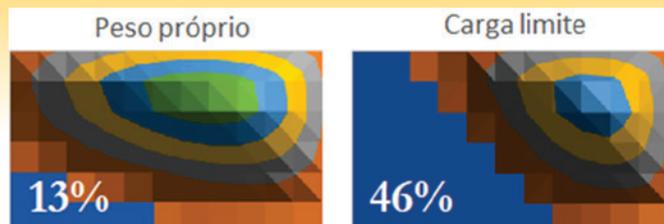
## 5. Análises paramétricas

Para avaliar a variação na força limite e a influência que a



**Figura 12**  
Força x Deslocamento lateral no meio do vão

Fonte: Autores (2018)



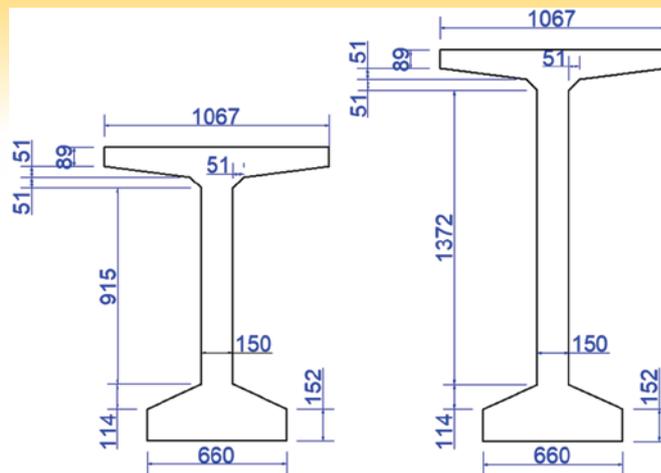
**Figura 13**

Perda de contato com aplicação do peso próprio e da carga limite

Fonte: Autores (2018)

excentricidade lateral inicial e o comprimento do vão exercem sobre o levantamento da viga sobre a almofada, foram modeladas 32 vigas, sendo 16 vigas com a seção padrão da AASHTO BT-54 e 16 com a seção padrão BT-72. As dimensões das seções são mostradas na Figura 14.

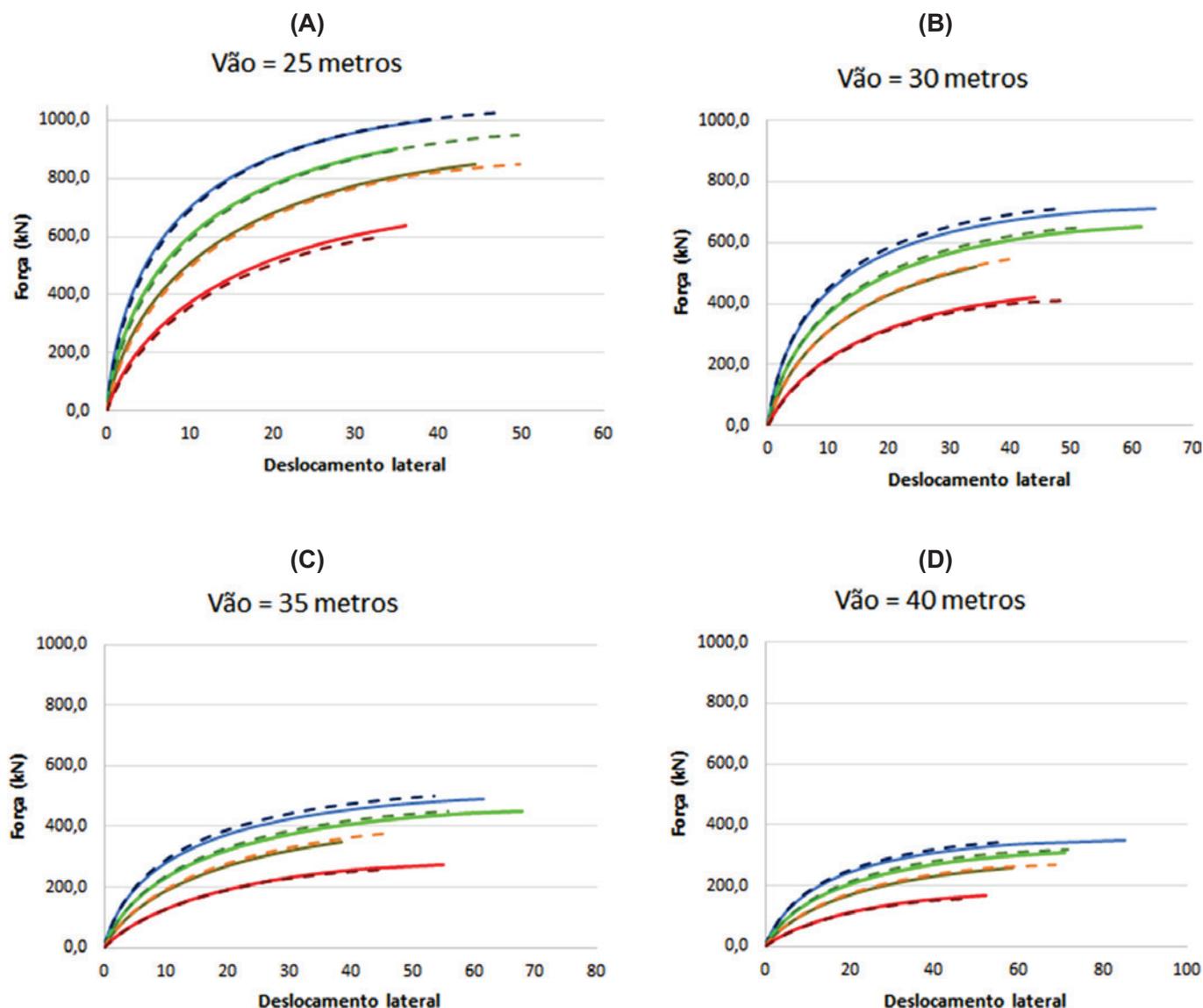
Foram considerados vãos de 25, 30, 35 e 40 m e 4 excentricidades (L/1000, L/700, L/500 e L/300, sendo L o vão da viga). A nomenclatura



**Figura 14**

Seção das vigas BT-54 (esquerda) e BT-72 (direita) - dimensões em mm

Fonte: Autores (2018)



**Figura 15**

Gráfico de Força × Deslocamento lateral no meio do vão (mm)

Fonte: Autores (2018)

utilizada é da forma BT-54-25-L/1000 em que BT-54 refere-se à seção da viga, 25 representa o vão em metros e L/1000 o valor da excentricidade lateral inicial, sendo L o comprimento da viga.

No modelo, considera-se que as vigas estão apoiadas sobre as almofadas de apoio do tipo B. A rigidez vertical total da almofada utilizada na determinação das rigidezes longitudinais de cada mola componente da almofada foi a rigidez fornecida por Hurff [8] de 1042 kN/mm. A rigidez de cada mola foi obtida pela Equação 1. Para o concreto, adotou-se os mesmos parâmetros de Hurff [8] para o módulo de elasticidade e para o coeficiente de Poisson.

### 5.1 Deslocamento lateral e força limite

Para cada combinação de variáveis são traçadas as curvas de Força  $\times$  Deslocamento lateral no meio do vão. Destas curvas, são determinadas as forças limites de tombamento e são obtidas as relações de Força limite  $\times$  Vão Considerado.

São apresentadas também as forças resultantes sobre as almofadas de apoio para cada caso, e é mostrado o percentual de perda de contato entre a viga e a almofada para cada combinação de variáveis considerando as duas situações de carregamento descritas anteriormente. Com a força resultante e a área carregada, calcula-se a tensão de compressão sobre a almofada para comparar aos valores limites da ABNT NBR 9062:2017 [11].

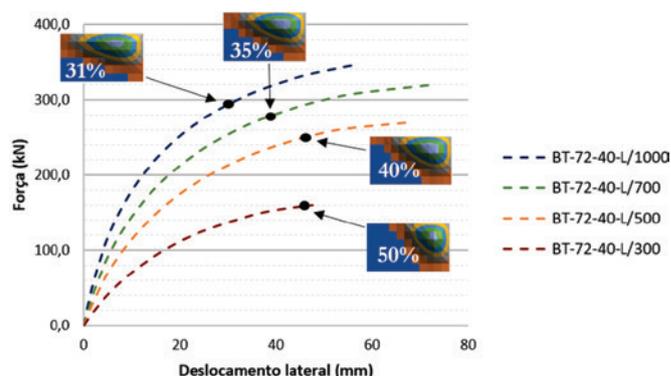
A Figura 15 mostra os gráficos de Força  $\times$  Deslocamento lateral no meio do vão. As curvas foram divididas por vão.

Pela Figura 15, observa-se que, para os quatro vãos adotados e para as duas seções analisadas, a mudança da seção da viga não influencia significativamente no deslocamento lateral no meio do vão, apesar das curvas para a viga BT-72 mostrarem um desempenho levemente melhor. Isto ocorre pelo fato de o momento de inércia lateral das duas seções não variarem entre si de forma considerável, pois a única diferença entre as duas seções é a altura da viga, mais especificamente a altura da alma, que influencia pouco no momento de inércia lateral. Observa-se também que, conforme a excentricidade aumenta, maior é o deslocamento lateral para a mesma força aplicada no meio do vão.

A Figura 16 mostra as curvas de força  $\times$  deslocamento lateral para a seção PCI BT-72 e vão de 40 m, destacando as respectivas cargas limites e perda de contato entre a viga e as almofadas de apoio.

A força limite é obtida pelas curvas de Força  $\times$  Deslocamento lateral no meio do vão, conforme a inclinação da reta tangente à curva. A Figura 17 mostra a força limite para cada configuração de seção, vão e excentricidade das vigas. Para a mesma excentricidade, observa-se que a força limite diminui conforme aumenta o vão. A força limite também diminui conforme aumenta a excentricidade lateral inicial, tendo as vigas com excentricidade de L/300 valores de força limite bem abaixo das demais.

Quando comparadas as curvas de força limite  $\times$  vão para as duas seções diferentes, com mesmo vão e mesma excentricidade, nota-se que as vigas com a seção BT-72 possuem uma força limite levemente superior em comparação às vigas com seção BT-54. Isto pode ser consequência da pequena diferença entre as inércias laterais existente entre as duas seções. Outra provável causa é a diferença na altura das duas seções, pois a seção BT-72, mais alta, resulta em um levantamento menor da viga sobre a almofada.

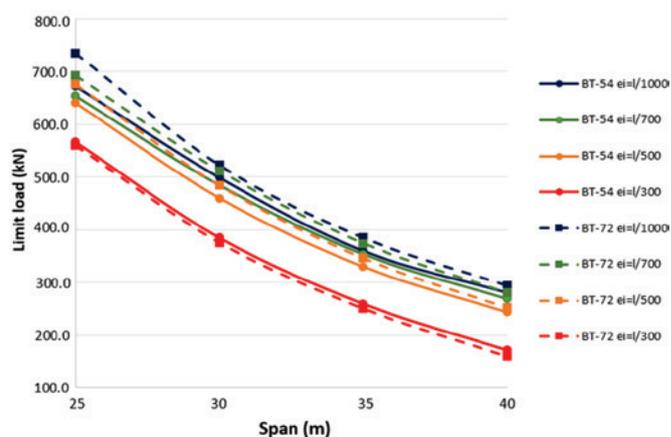


**Figura 16**  
Carga limite e levantamento para a seção BT-72 com 40 m de vão

Fonte: Autores (2018)

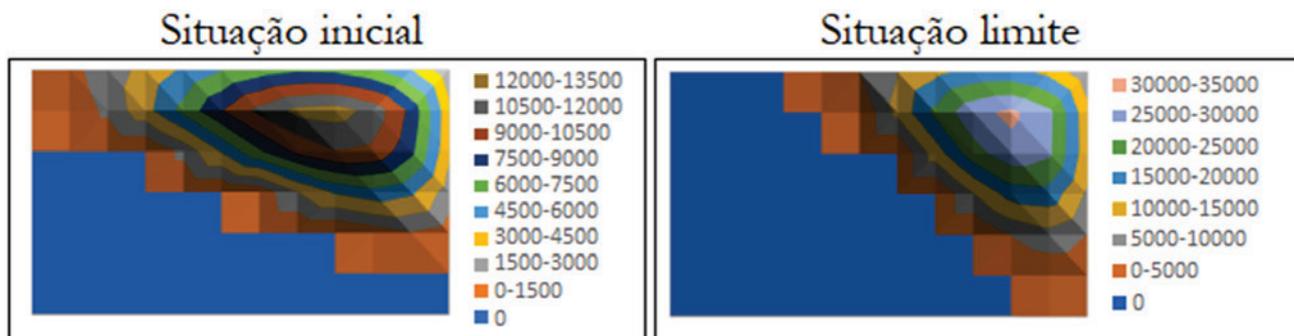
### 5.2 Levantamento da viga sobre as almofadas

Nas análises de instabilidade lateral, é de grande importância a avaliação da ocorrência do levantamento (*lift off*) da viga sobre as almofadas, pois este levantamento é também responsável pelo comportamento não-linear das vigas durante o tombamento, assim como a esbelteza da viga, que pode resultar numa rigidez ao giro da almofada inferior à necessária para garantir o equilíbrio da viga durante esta etapa construtiva. Para avaliar este comportamento, as almofadas de apoio foram modeladas como sendo um conjunto de elementos sólidos apoiados em molas. Vale ressaltar que as molas do modelo trabalham somente à compressão e, portanto, as molas tracionadas apresentam reação igual a zero e representam a região onde ocorre o levantamento da viga. O levantamento foi analisado nas situações inicial e limite, em que a inicial refere-se à aplicação do peso próprio, somente, e a limite refere-se à aplicação do peso próprio e da força concentrada no meio do vão.



**Figura 17**  
Força limite  $\times$  vão

Fonte: Autores (2018)



**Figura 18**  
Levantamento da viga BT-54-40-L/300 sobre a almofada e reações nas molas (N)  
**Fonte:** Autores (2018)

Outra consequência da perda de contato é que a força aplicada na almofada já não é distribuída em toda a área da almofada, o que resulta em tensões de compressão maiores sobre a área carregada das almofadas, e este carregamento não deve ultrapassar os limites impostos pela norma ABNT NBR 9062:2017 [11]. A força aplicada sobre a almofada refere-se ao peso próprio, na situação inicial, e ao peso próprio somado à força limite de cada caso. Em relação ao limite de tensão de compressão, conforme a ABNT NBR 9062:2017 [11], a tensão máxima para a almofada de apoio, cujas dimensões são  $35,6 \times 61,0$  cm, é de 15,0 MPa.

A Figura 18 mostra a perda de contato para a situação inicial e situação limite para a viga BT-54-40-L/300 e mostra o valor das reações de apoio sobre a almofada, em N.

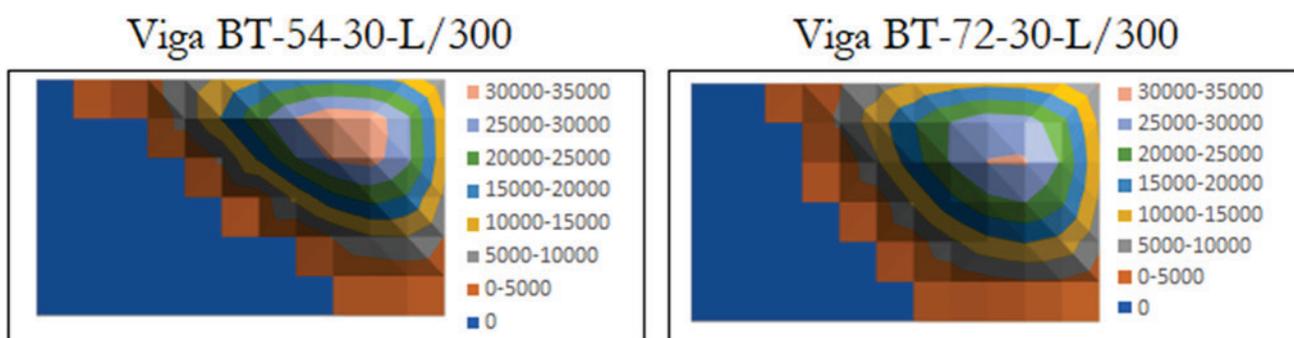
Pela Figura 18, observa-se que o levantamento provoca uma redução significativa da área carregada para a viga analisada. Na situação inicial, a perda de contato é de 44,44% e, na situação limite, a perda de contato é de 59,72%. Na situação inicial, a tensão de compressão atuante na área carregada é de 1,75 MPa e na situação final é de 4,37 MPa. Portanto, em nenhum caso, a tensão de compressão atinge o limite imposto pela ABNT NBR 9062:2017 [11]. A Figura 19 compara a perda de contato para as vigas BT-54 e BT-72, com 30 m de vão e excentricidade L/300, para a situação limite. A perda de contato foi de 47,22% e 40,28% para as vigas BT-54 e BT-72, respectivamente.

A Tabela 1 mostra a perda de contato nas duas situações, em porcentagem, para todas as vigas analisadas. Nota-se que, para o mesmo vão e mesma excentricidade, todas as vigas com seção BT-54 apresentaram perda de contato superior às vigas com seção BT-72. Observa-se também que, para a situação inicial, somente as vigas de seção BT-72, com vão de 25 m e excentricidade de L/1000 e L/700, não apresentaram levantamento.

### 5.3 Rigidez efetiva das almofadas

A Tabela 2 mostra a diferença resultante da aplicação da força concentrada no meio do vão sobre as rigidezes efetivas em torno dos eixos X e Y. Na Tabela 2, a abreviação “pp” se refere ao peso próprio (situação inicial) e “limite” refere-se à situação com peso próprio somado com a aplicação da força limite no meio do vão (situação limite).

Ao avaliar os valores mostrados na Tabela 2, observa-se que as rigidezes tendem a diminuir conforme aplica-se a força limite no meio do vão. Porém, para as vigas BT-72-25-L/1000 e BT-72-25-L/700, nota-se que não houve redução, e sim um aumento da rigidez ao giro das almofadas. É certo que o aumento na compressão inicial da almofada provoca um aumento na rigidez ao giro. Portanto, supõe-se que os ganhos com essa compressão inicial são mais significativos do que as perdas provocadas pelo acrés-



**Figura 19**  
Levantamento da viga BT-54-30-L/300 e BT-72-30-L/300 sobre a almofada e reações nas molas (N)  
**Fonte:** Autores (2018)

**Tabela 1**

Perda de contato na situação limite para as vigas analisadas

Vão (m)	Excentricidade	Situação inicial		Situação limite	
		Perda de contato (%)		Perda de contato (%)	
		BT-54	BT-72	BT-54	BT-72
25	L/1000	9,72	0,00	26,39	6,94
	L/700	11,11	0,00	25,00	12,50
	L/500	12,50	1,39	27,78	16,67
	L/300	16,67	6,94	37,50	33,33
30	L/1000	23,61	2,78	34,72	15,28
	L/700	25,00	4,17	36,11	19,44
	L/500	25,00	6,94	36,11	26,39
	L/300	26,39	13,89	47,22	40,28
35	L/1000	33,33	9,72	41,67	23,61
	L/700	33,33	11,11	43,06	27,78
	L/500	34,72	12,50	44,44	31,94
	L/300	34,72	20,83	54,17	47,22
40	L/1000	40,28	19,44	47,22	30,56
	L/700	41,67	19,44	50,00	34,72
	L/500	41,67	20,83	51,39	40,28
	L/300	44,44	30,56	59,72	50,00

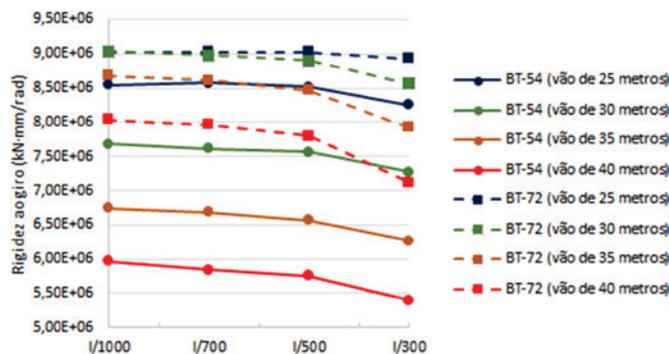
Fonte: Autores (2018)

**Tabela 2**

Diferenças entre rigidezes da almofada

Viga	K <sub>0y</sub> (pp) kN•mm/rad	K <sub>0y</sub> (limite) kN•mm/rad	Redução %	K <sub>0x</sub> (pp) kN•mm/rad	K <sub>0x</sub> (limite) kN•mm/rad	Redução %
BT-54-25-L/1000	8,54E+06	8,10E+06	5,18	3,12E+06	2,98E+06	4,52
BT-54-25-L/700	8,58E+06	7,97E+06	7,11	3,11E+06	2,91E+06	6,38
BT-54-25-L/500	8,52E+06	7,69E+06	9,73	3,07E+06	2,77E+06	9,97
BT-54-25-L/300	8,26E+06	6,69E+06	18,97	2,96E+06	2,34E+06	20,98
BT-54-30-L/1000	7,69E+06	6,91E+06	10,16	2,86E+06	2,55E+06	10,94
BT-54-30-L/700	7,62E+06	6,76E+06	11,30	2,83E+06	2,46E+06	13,07
BT-54-30-L/500	7,56E+06	6,47E+06	14,46	2,79E+06	2,32E+06	16,66
BT-54-30-L/300	7,27E+06	5,38E+06	26,10	2,63E+06	1,90E+06	27,72
BT-54-35-L/1000	6,74E+06	6,00E+06	10,95	2,50E+06	2,18E+06	12,89
BT-54-35-L/700	6,68E+06	5,81E+06	13,10	2,48E+06	2,09E+06	15,68
BT-54-35-L/500	6,57E+06	5,47E+06	16,71	2,43E+06	1,95E+06	19,84
BT-54-35-L/300	6,27E+06	4,31E+06	31,25	2,26E+06	1,56E+06	31,13
BT-54-40-L/1000	5,97E+06	5,25E+06	12,15	2,17E+06	1,87E+06	13,91
BT-54-40-L/700	5,85E+06	4,97E+06	15,03	2,14E+06	1,78E+06	16,95
BT-54-40-L/500	5,76E+06	4,51E+06	21,65	2,10E+06	1,64E+06	21,77
BT-54-40-L/300	5,39E+06	3,41E+06	36,84	1,93E+06	1,28E+06	33,61
BT-72-25-L/1000	9,03E+06	9,55E+06	-5,81	3,19E+06	3,40E+06	-6,29
BT-72-25-L/700	9,03E+06	9,35E+06	-3,57	3,19E+06	3,31E+06	-3,71
BT-72-25-L/500	9,03E+06	8,95E+06	0,80	3,19E+06	3,13E+06	1,90
BT-72-25-L/300	8,94E+06	7,53E+06	15,73	3,15E+06	2,56E+06	18,86
BT-72-30-L/1000	9,04E+06	8,86E+06	1,99	3,20E+06	3,19E+06	0,51
BT-72-30-L/700	8,98E+06	8,55E+06	4,79	3,19E+06	3,04E+06	4,67
BT-72-30-L/500	8,90E+06	7,99E+06	10,18	3,16E+06	2,79E+06	11,81
BT-72-30-L/300	8,57E+06	6,41E+06	25,24	3,01E+06	2,19E+06	27,16
BT-72-35-L/1000	8,68E+06	8,06E+06	7,22	3,14E+06	2,93E+06	6,80
BT-72-35-L/700	8,61E+06	7,70E+06	10,57	3,10E+06	2,74E+06	11,72
BT-72-35-L/500	8,47E+06	7,12E+06	15,94	3,04E+06	2,48E+06	18,28
BT-72-35-L/300	7,92E+06	5,38E+06	32,17	2,78E+06	1,89E+06	32,25
BT-72-40-L/1000	8,05E+06	7,22E+06	10,33	2,96E+06	2,61E+06	11,77
BT-72-40-L/700	7,96E+06	6,82E+06	14,28	2,92E+06	2,42E+06	16,91
BT-72-40-L/500	7,80E+06	6,14E+06	21,26	2,83E+06	2,15E+06	24,11
BT-72-40-L/300	7,13E+06	4,51E+06	36,65	2,49E+06	1,64E+06	34,33

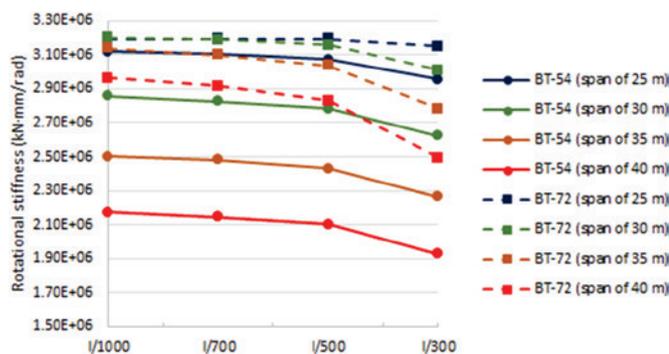
Fonte: Autores (2018)



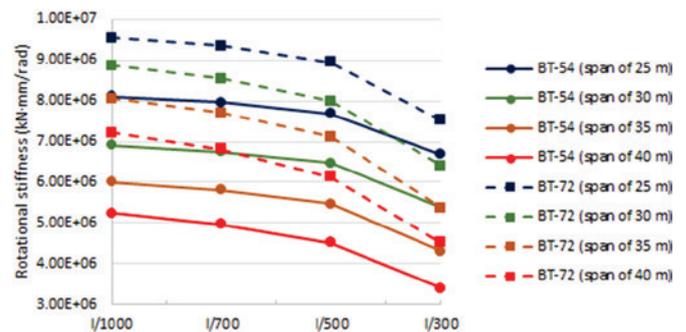
**Figura 20**  
Rigidez efetiva em torno de Y x excentricidade no meio do vão (situação inicial)  
Fonte: Autores (2018)

cimo do giro da almofada devido à força aplicada no meio do vão. Outra forma de avaliação da rigidez é em relação ao aumento da excentricidade para um mesmo vão e mesma seção. Para isso, são desenhadas as curvas de Rigidez ao giro x excentricidade no meio do vão. A Figura 20 mostra a redução da rigidez efetiva na direção Y e a Figura 21 mostra a redução da rigidez na direção X, considerando a situação inicial. A rigidez em Y refere-se à flexão lateral da viga, e a rigidez em X, à flexão vertical da viga. A Figura 22 mostra a redução da rigidez na direção Y e a Figura 23, na direção X, para a situação limite. Analisando a Figura 20 e Figura 21 referentes ao estado inicial (com aplicação do peso próprio), observa-se que as rigidezes diminuem com o aumento da excentricidade para todos os casos. Considerando a rigidez em torno de Y, que é a que afeta a estabilidade das vigas, nota-se que, para o vão de 25 m, a redução na rigidez não é tão destacada. Já para os vãos maiores, principalmente para o vão de 40 m, a redução é significativa.

A redução da rigidez em torno de Y para a situação inicial entre a viga com excentricidade de L/1000 e a viga com excentricidade de L/300 para a BT-54 e BT-72 é de 3% e 1%, respectivamente. Já para o vão de 40 m, a rigidez em torno de Y reduz em 10% para a viga BT-54 e em 11% para a BT-72.



**Figura 21**  
Rigidez efetiva em torno de X x excentricidade no meio do vão (situação inicial)  
Fonte: Autores (2018)



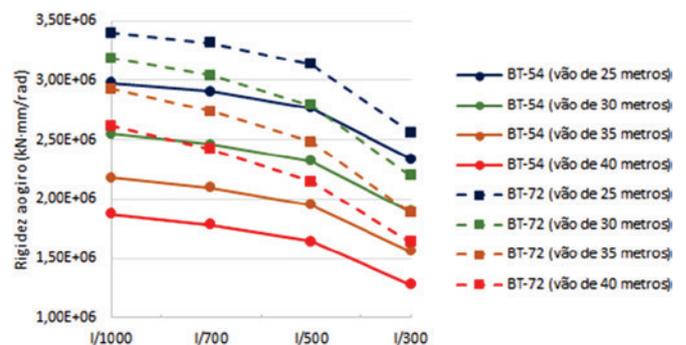
**Figura 22**  
Rigidez efetiva em torno de Y x excentricidade no meio do vão (situação limite)  
Fonte: Autores (2018)

Ao se comparar os valores de rigidez considerando a situação limite, observa-se que a rigidez reduz de maneira considerável para todos os vãos. Há esta diferença entre a situação inicial e a situação limite porque o momento gerado na situação limite, que considera o peso próprio mais a força concentrada no meio do vão, é muito maior que o momento gerado somente pelo peso próprio na situação inicial. A Figura 22 e a Figura 23 mostram a redução de rigidez em torno de Y e X, respectivamente, para esta situação limite.

A redução da rigidez em torno de Y para os limites de excentricidades considerados (L/1000 e L/300) para as vigas BT-54 e BT-72 com 25 m de vão é de 17% e 21%, respectivamente. Para o vão de 40 m, a redução é de 35% para a BT-54 e de 37% para a BT-72. Portanto, considerando somente o peso próprio, conclui-se que a excentricidade reduz a rigidez de forma proeminente somente para os vãos maiores. Supõe-se também que esta redução não foi maior pelo fato de o momento de inércia lateral ter um valor elevado, devido às dimensões das mesas superior e inferior.

## 6. Conclusões

De maneira geral, o presente trabalho buscou criar modelos de vigas sobre almofadas de apoio de elastômero para combinações de seção



**Figura 23**  
Rigidez efetiva em torno de X x excentricidade no meio do vão (situação limite)  
Fonte: Autores (2018)

da viga, vãos e excentricidades, de forma a obter informações sobre os deslocamentos laterais nas vigas devido à uma força concentrada aplicada no meio do vão. Com essas informações, foram obtidas as forças limite de tombamento para cada situação e foi avaliado também o problema de levantamento da viga quando o giro desta sobre a almofada atinge valores excessivos. Também foi analisado o comportamento da rigidez das almofadas de apoio elastoméricas nas diversas combinações. De maneira detalhada, pode-se concluir que:

- a) Em comparação aos dois ensaios experimentais: Hurff [8] e Consolazio, Hamilton e Beery [3], o modelo de viga constituída por elementos sólidos apoiada sobre o modelo simplificado da almofada de apoio forneceu valores adequados de rotação e de deslocamentos laterais no meio do vão. Em relação ao primeiro, o valor de força limite obtido foi de 484,0 kN que, comparados aos 463,0 kN de Hurff [8], resulta numa diferença de 4,5%. Por fim, o modelo da viga de Consolazio, Hamilton e Beery [3] também forneceu um valor próximo da força limite (61,5kN), que difere do valor experimental (68,5kN) em 10,2%. Portanto, conclui-se que o modelo é adequado para representar uma viga apoiada sobre almofadas elastoméricas e que o critério da inclinação da reta tangente à curva de força  $\times$  deslocamento lateral no meio do vão é suficiente para determinar as forças limite de tombamento.
- b) As análises paramétricas buscaram avaliar as variações da força limite e do levantamento das vigas conforme são alterados as imperfeições iniciais e os vãos. Em relação à força limite, observa-se que o aumento da excentricidade e do vão provocam redução dessas forças. Em relação à altura da viga, que foi considerada utilizando-se duas seções padrão da AASHTO (BT-54 e BT-72), a influência que esta exerce sobre a instabilidade lateral não é significativa, visto que é a inércia lateral que rege a estabilidade da viga.
- c) O levantamento da viga sobre as almofadas é de extrema importância na avaliação da estabilidade das vigas. Em relação às vigas analisadas, mesmo nas que tiveram uma perda de contato de aproximadamente 50% entre a viga e a almofada, a tensão de compressão na área resultante não ultrapassou o limite imposto pela norma brasileira de 15,0 MPa.
- d) Por fim, este trabalho buscou determinar as rigidezes efetivas das almofadas de apoio nas situações inicial e limite de carregamento. Observou-se que a rigidez à rotação diminuiu com o aumento da excentricidade e que esta redução chegou a 16% em alguns casos considerando o peso próprio. Na situação limite, a redução devido à excentricidade chegou à 37%. Constatou-se também que a rigidez à rotação passando da situação inicial para a situação limite diminuiu em quase todos os casos. Nesta análise, o aumento no giro da almofada tende a diminuir a rigidez e o aumento na força aplicada no meio do vão tende a provocar uma compressão maior na almofada. Portanto, em quase todos os casos o aumento no giro foi mais desfavorável que o aumento na compressão inicial da almofada devido ao aumento da força aplicada.

## 7. Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Finan-

ciamento 001 pela bolsa de Mestrado Acadêmico e à FAPEMIG (Edital Demanda Universal 01/2015 Projeto TEC APQ 00099/15) pelo apoio financeiro à pesquisa.

## 8. Referências

1. Oesterle, R. G.; Sheehan, M. J.; Lotfi, H. R.; Corley, W. G.; Roller, J. J. Investigation of red mountain freeway bridge girder collapse. Arizona Department of Transportation, Bridge Group, Skokie, Illinois. CTL Group Project No. 262291, nov., 2007.
2. Bairán, J. M.; Cladera, A. Collapse of a precast concrete beam for a light roof. Importance of elastomeric bearing pads in the element's stability. *Engineering Failure Analysis*. Oxford, v. 39, p. 188 – 199, April 2014.
3. Consolazio, G. R.; Hamilton, H. R.; Beery, M. S. Experimental validation of bracing recommendations for long-span concrete girders. *Structure Research Report 2012/72909-74040*. University of Florida, Gainesville, dec., 2012.
4. Hurff, J. B.; Kanh, L. F. Rollover stability of precast, prestressed concrete bridge girders with flexible bearings. *PCI Journal*. Chicago, v. 57, n. 12, p. 96 – 107, Fall, 2012.
5. Krahl, P. A.; Carrazedo, R.; El Debs, M. K. Rollover stability of precast concrete beams supported by elastomeric bearing pads. *Ibracon structures and materials journal*. São Paulo, v. 10, n. 6, p. 1192 – 1204, December 2017.
6. LEE, J.H. Evaluation of the lateral stability of precast beams on an elastic bearing support with a consideration of the initial sweep. *Engineering Structures*, v. 143, n. 1, p. 101-112, 2017.
7. Cardoso, M. T. S. A.; Lima, M. C. V. Physical and geometrical non-linear behavior of precast beams on elastomeric supports. *Ibracon Structures and Materials Journal*. São Paulo, v. 11, n. 7, p. 183 – 202, February 2018.
8. Hurff, J. B. Stability of Precast Prestressed Concrete Bridge Girder Considering Imperfections and Thermal Effects. *Dissertation*. 2010. 483 f. (Degree Doctor of Philosophy) – School of Civil and Environmental Engineering. Georgia Institute of Technology, Georgia, 2010.
9. Harper, Z. S.; Consolazio G. R. Calculation Method for Quantifying Axial and Roll Stiffnesses of Rectangular Steel-Reinforced Elastomeric Bridge Bearing Pads. *Transportation Research Record*. Washington, v. 2331, n. 1, p. 3 – 13, 2013.
10. CARDOSO, M. T. S. A. Instabilidade lateral de vigas pré-moldadas sobre apoios elastoméricos considerando o efeito das imperfeições geométricas. *Dissertação (Mestrado)*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, FECIV, Universidade Federal de Uberlândia, 2017.
11. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 9062. Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. Rio de Janeiro, 2017.