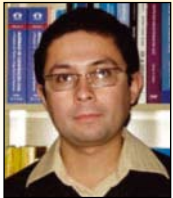


Nonlinear analysis of reinforced concrete structures in design procedures: application of lumped dissipation models

Análise não-linear de estruturas de concreto armado em procedimentos de projeto: emprego de modelos de dissipação concentrada



G. M. S. ALVA ^a
alva_gerson@yahoo.com.br

A. L. H. C. EL DEBS ^b
analucia@sc.usp.br

J. KAMINSKI JR. ^c
jkj@smail.ufsm.br

Abstract

This paper deals with the utilization of lumped dissipation models in the nonlinear analysis of reinforced concrete structures for design procedures, particularly those that deal with material nonlinearity in structural analysis. The main purpose of this paper is to compare the results obtained from the theoretical model with the results obtained from other types of structural analysis, including the simplified procedures recommended by NBR 6118 to consider the effects of material nonlinearity. Based on two numerical examples of ultimate limit state verification, some advantages and limitations of the lumped dissipation models in real situations of design are discussed.

Keywords: *structural analysis; nonlinear analysis; design of concrete structures; damage.*

Resumo

Este trabalho trata da utilização de modelos de dissipação concentrada na análise não-linear de estruturas de concreto armado em procedimentos de projeto, com ênfase na análise estrutural envolvendo a não-linearidade física. Um dos objetivos principais do trabalho é comparar os resultados fornecidos pelo modelo teórico abordado com os resultados de outros tipos de análise estrutural, incluindo as simplificações preconizadas pela NBR 6118 para a consideração da não-linearidade física. Por meio da análise de dois exemplos numéricos de verificação de Estados Limites Últimos, são apontadas vantagens do modelo de dissipação concentrada em situações reais de projeto.

Palavras-chave: *análise estrutural; análise não-linear; projeto de estruturas de concreto, dano.*

^a Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Estruturas e Construção Civil, alva_gerson@yahoo.com.br, Address: Avenida Roraima 1000 Cidade Universitária CEP: 97105-900, Santa Maria-RS, Brasil;

^b Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, analucia@sc.usp.br. Address: Campus São Carlos Rodovia Washington Luis (SP-310), km 235, CEP 13565-905. São Carlos - SP – Brasil;

^c Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Estruturas e Construção Civil, jkj@smail.ufsm.br. Address: Avenida Roraima 1000 Cidade Universitária CEP: 97105-900, Santa Maria-RS, Brasil.

1. Introdução

1.1 Importância do tema

As estruturas de concreto armado exibem um comportamento fisicamente não-linear, em regime de serviço e especialmente em regime de ruptura. A principal razão da não-linearidade reside no fato de que os materiais constituintes destas estruturas não apresentam comportamento elástico-linear. A não-linearidade física pode ser facilmente observada nas curvas tensão-deformação uniaxiais dos materiais aço e concreto e também nos diagramas momento-curvatura das seções. Em linhas gerais, a fissuração e a plastificação do aço e do concreto são as principais causas da não-linearidade física das estruturas de concreto armado.

No âmbito da pesquisa, pode-se afirmar que nas últimas décadas ocorreram diversos e importantes avanços no estudo do comportamento não-linear (estático e dinâmico) das estruturas, chegando-se a modelos mecânicos bastante satisfatórios para simular com melhor precisão o comportamento estrutural. No âmbito do desenvolvimento tecnológico, os avanços dos recursos computacionais vem contribuindo muito para a Engenharia Estrutural, uma vez que representam importantes elementos de fomento ao desenvolvimento de ferramentas de simulação numérica. Atualmente, a grande capacidade de processamento dos computadores permite a utilização de modelos constitutivos e métodos numéricos mais complexos, reproduzindo melhor o comportamento estático e dinâmico das estruturas.

Em se tratando de projeto, as estruturas – inclusive as de concreto armado – tradicionalmente são dimensionadas com os resultados de uma análise elástica-linear. Embora procedimentos e modelos simples sejam desejáveis e importantes para a prática do projeto estrutural, é crucial que o projetista tenha uma postura crítica com relação ao emprego e as limitações de uma análise elástica-linear no dimensionamento dos elementos estruturais. Resultados teóricos e experimentais demonstram que a hipótese de comportamento elástico-linear pode apresentar resultados tanto contra quanto à favor da segurança, ou seja, pode conduzir à construção de estruturas menos seguras ou menos econômicas. Em particular, deve-se enfatizar a impossibilidade de uma análise elástica-linear em representar a redistribuição de esforços na estrutura decorrentes da alteração da rigidez das seções. Em muitos casos, a análise estrutural com a hipótese de comportamento linear e elástico pode subestimar os esforços nas seções menos solicitadas e superestimar os esforços nas mais solicitadas.

Na análise global da estrutura, a fim de evitar a maior complexidade de uma análise que inclui a não-linearidade física, diversas pesquisas e códigos normativos propõem uma consideração simplificada da não-linearidade física por meio de redução da rigidez inicial das seções, em geral em relação à seção bruta de concreto. A norma brasileira de projeto de estruturas de concreto – NBR 6118:2003 [1] – apresenta em seu item 15.7.3 um procedimento para a consideração aproximada (simplificada) da não-linearidade física prescrevendo valores reduzidos de rigidez à flexão, em função do tipo de elemento estrutural (viga, pilar ou laje).

Embora possa conduzir a resultados aceitáveis dentro de um campo de aplicação, deve-se reconhecer que a adoção de um único coeficiente de redução da rigidez das seções para os elementos da estrutura – como preconiza a NBR 6118 – é um procedimento muito simplificado, embora possa conduzir a resultados satisfató-

rios do ponto de vista dos deslocamentos globais. Entretanto, em termos de solicitações as diferenças podem ser relevantes. Além disso, existe na bibliografia especializada uma falta de consenso para a redução da rigidez dos elementos, evidenciada pela grande variabilidade nos valores propostos, conforme destacado no trabalho de Pinto [2]. Na realidade, os coeficientes de redução da rigidez dos elementos em uma consideração simplificada dependem de uma série de fatores, em especial da geometria da estrutura, da taxa de armadura dos elementos e do tipo de carregamento.

As normas técnicas de projeto de estruturas de concreto, inclusive a NBR 6118, permitem a utilização de uma análise elástico-linear seguida de uma correção nos esforços solicitantes a fim de levar em conta o comportamento não-linear dos materiais estruturais. Essa correção é conhecida como redistribuição de esforços e depende da ductilidade dos elementos estruturais, especialmente nas seções mais solicitadas. Em vigas hiperestáticas, promove-se a redistribuição de esforços por meio da redução dos momentos negativos, utilizando-se os coeficientes de redistribuição, os quais são limitados pelas normas em função da posição da linha neutra e da classe de resistência do concreto. Essa redução dos picos do diagrama de momentos fletores pode permitir um melhor aproveitamento dos materiais, especialmente das armaduras negativas nas seções de apoios. Entretanto, Carvalho et al. [3] alertam para o fato de que os coeficientes de redistribuição adotados por projetistas estruturais não são balizados em razões técnicas, sendo muitas vezes aleatórios, adotados de forma automática, tendo valores únicos para um conjunto de peças da estrutura.

Deve-se frisar que a redistribuição de esforços nos elementos de concreto armado é limitada pela capacidade de rotação plástica das seções críticas. Para realizar um dimensionamento com coeficientes de redistribuição fora dos limites prescritos pelas normas, deve-se verificar que a demanda de rotação plástica seja menor ou igual à capacidade de rotação plástica. A rigor, esta verificação evita situações em que a carga de ruptura é inferior à carga correspondente aos diagramas de esforços modificados pela análise linear com redistribuição de momentos. Tais situações são conhecidas como casos de redistribuição parcial de momentos, conforme destacado por Lopes et al. [4].

A verificação explícita da capacidade de rotação plástica pode ser realizada pelo emprego de análise plástica ou de análise não-linear. Entretanto, a análise plástica limita-se a estruturas relativamente simples, pelo fato de ser impraticável a determinação dos mecanismos de colapso em sistemas diversas vezes hiperestáticos (como pórticos espaciais) frente às diversas combinações de ações que devem ser consideradas. Em estruturas de geometria mais complexa e submetidas a diferentes combinações de carregamentos, o emprego da análise não-linear para a comprovação da capacidade de rotação plástica torna-se mais viável.

Apesar dos avanços da análise não-linear das estruturas e dos recursos computacionais disponíveis, os profissionais ainda encontram dificuldades para empregar modelos mecânicos mais sofisticados na prática do projeto estrutural. Tais dificuldades estão associadas ao maior tempo gasto nas análises não-lineares, ao grande número de parâmetros que podem ser requeridos pelos modelos constitutivos ou pela dificuldade de obtenção desses parâmetros em ensaios de caracterização dos materiais estruturais. É importante que os modelos mecânicos utilizados em projeto sejam consistentes e simples, considerando apenas parâmetros essenciais e que sejam capazes de garantir a segurança frente aos

Estados Limites Últimos. Evidentemente, esses modelos devem ser validados em comparação com resultados experimentais, especialmente quando o comportamento estrutural envolver a não-linearidade física.

1.2 Justificativa para a utilização de modelos de dissipação concentrada

O modelo abordado neste trabalho insere-se no grupo conhecido como modelos de dissipação concentrada, pois consideram que os processos de dissipação de energia (danificação e plastificação dos materiais) responsáveis pela resposta não-linear ocorrem em zonas previamente definidas, que se localizam nas extremidades de um elemento finito de barra. Os modelos de dissipação concentrada encontram base na Mecânica do Dano, a qual tem se destacado na simulação de respostas numéricas de diversos materiais - especialmente do concreto - permitindo a quantificação do processo de deterioração decorrente da formação de fissuras no comportamento mecânico macroscópico do material e da estrutura. Na Mecânica do Dano, as leis constitutivas são escritas em função de uma variável de dano, a qual tem correspondência com a redução das propriedades de rigidez e de resistência dos materiais.

O trabalho pioneiro que introduziu o conceito de Dano Contínuo foi elaborado por Kachanov [5], o qual se propôs a descrever o efeito da deterioração coletiva por meio de uma variável escalar, representando um processo inerentemente discreto por uma variável de dano contínua. O interesse inicial do trabalho de Kachanov [5] foi a ruptura frágil por fluência em metais solicitados uniaxialmente à tração. Posteriormente, destacaram-se modelos aplicáveis ao concreto, como os propostos por Mazars [6] e por La Borderie, Pijaudier-Cabot e Mazars [7].

Nos últimos anos, diversas pesquisas têm sido desenvolvidas na Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP) a respeito da formulação e aplicação de modelos baseados na Mecânica do Dano [8-13]. Especificamente sobre os modelos de dissipação concentrada podem ser citados os trabalhos de Álvares [14-15], Pituba [16], Alva [17] e Araújo [18].

Uma das principais vantagens do modelo de dissipação concentrada abordado neste trabalho reside nas facilidades associadas aos parâmetros de entrada requeridos pelo modelo constitutivo: poucos e familiares aos engenheiros estruturais, podendo ser bem estimados a partir do cálculo usual das seções armadas. Além disso, o pequeno número de graus de liberdade do elemento finito utilizado pelo modelo reduz o custo computacional do processamento, tornando atrativa a sua aplicação na análise de estruturas reticuladas de concreto.

As boas correlações com diversos resultados experimentais observados em diversas pesquisas acadêmicas fornecem bons indícios sobre o potencial do modelo teórico em questão para aplicações em verificações de projeto associadas ao Estado Limite Último.

1.3 Objetivos do trabalho

Inicialmente são apresentados, de forma breve, os principais conceitos do modelo de dissipação concentrada e os principais parâmetros requeridos pelo modelo constitutivo. Na seqüência, confrontam-se alguns resultados experimentais com a resposta numérica fornecida pelo modelo teórico utilizado. Nos trabalhos

de Alva [17] e Araújo [18] podem ser encontrados comparações com resultados experimentais de diversas estruturas de concreto armado (vigas, pórticos, ligações viga-pilar e pórticos com ligações pré-moldadas semi-rígidas) que confirmam a validação da aplicabilidade do modelo de dissipação concentrada.

Por fim, são apresentados alguns exemplos numéricos de aplicações em projeto nos quais os efeitos da não-linearidade física são importantes. Os exemplos tratam do dimensionamento de vigas contínuas em modelo de pórtico reduzido (ações verticais) e na análise estrutural de pórticos planos (ações verticais e horizontais). Algumas evidências do potencial do modelo em aplicações de projeto foram apresentadas em Alva [19]. Neste trabalho, discutem-se com mais profundidade os resultados obtidos a partir da análise não-linear com procedimentos e outros tipos de análise estrutural permitidos pela NBR 6118.

2. Modelos de dissipação concentrada

Os primeiros modelos de dissipação concentrada foram propostos por Giberson [20] e Otani [21] e consistiam em elementos de barra elástico-lineares com molas de rotação inelásticas nas extremidades. Melhorias para tais modelos foram propostas nos trabalhos de Soleimani, Popov e Bertero [22] e Filippou e Issa [23] para levar em conta o aumento do comprimento da zona inelástica ao longo do elemento. Posteriormente, surgiram os modelos baseados na Mecânica do Dano.

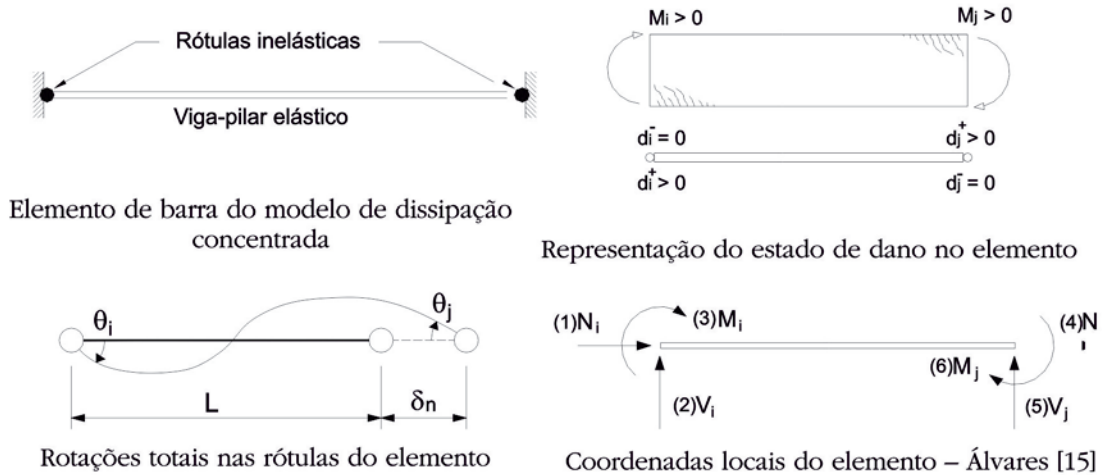
O modelo de dissipação concentrada abordado neste trabalho deriva dos modelos originalmente propostos por Flórez-López [24], Cipollina e Flórez-López [25], Cipollina, López-Inojosa e Flórez-López [26] e Flórez-López [27]. Os referidos modelos consideram que a dissipação de energia em elementos de concreto armado se deve tanto à danificação do concreto quanto à plastificação da armadura longitudinal de tração. Admite-se, como simplificação, que tal dissipação se encontra concentrada em rótulas plásticas de comprimento nulo, mantendo o comportamento elástico no restante da barra. Assim, a não-linearidade do comportamento estrutural – decorrente da dissipação de energia localizada nas rótulas – é representada por duas variáveis escalares, a saber: (i) variáveis adimensionais de dano nas extremidades do elemento (d_i e d_j), associadas com a densidade das microfissuras difusas no concreto, com valores compreendidos entre 0 e 1; (ii) rotações plásticas nas extremidades, decorrentes das deformações permanentes após o escoamento das armaduras.

A matriz de rigidez de um elemento de barra com seis graus de liberdade (figura 1), considerando as variáveis de dano nas extremidades (d_i e d_j), é apresentada em Álvares [15], conforme a Equação (1).

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \quad (1)$$

SIM.

Figura 1 – Modelo de dissipação concentrada



onde:

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= \frac{EA}{L}(1-d_n) & K_{12} &= 0 & K_{13} &= 0 & K_{14} &= \frac{EA}{L}(1-d_n) & K_{15} &= 0 & K_{16} &= 0 \\
 K_{22} &= \frac{12EI}{L^3} \left(1 - \frac{3d_i}{4} - \frac{3d_j}{4} + \frac{d_i d_j}{2} \right) & K_{23} &= -\frac{6EI}{L^2} \left(1 - d_i - \frac{d_j}{2} + \frac{d_i d_j}{2} \right) & K_{24} &= 0 \\
 K_{25} &= -\frac{12EI}{L^3} \left(1 - \frac{3d_i}{4} - \frac{3d_j}{4} + \frac{d_i d_j}{2} \right) & K_{26} &= -\frac{6EI}{L^2} \left(1 - \frac{d_i}{2} - d_j + \frac{d_i d_j}{2} \right) \\
 K_{33} &= \frac{4EI}{L} \left(1 - d_i - \frac{d_j}{4} + \frac{d_i d_j}{4} \right) & K_{34} &= 0 & K_{35} &= \frac{6EI}{L^2} \left(1 - d_i - \frac{d_j}{2} + \frac{d_i d_j}{2} \right) \\
 K_{36} &= \frac{2EI}{L} (1 - d_i - d_j + d_i d_j) & K_{44} &= \frac{EA}{L}(1-d_n) & K_{45} &= 0 & K_{46} &= 0 \\
 K_{55} &= \frac{12EI}{L^3} \left(1 - \frac{3d_i}{4} - \frac{3d_j}{4} + \frac{d_i d_j}{2} \right) & K_{56} &= \frac{6EI}{L^2} \left(1 - \frac{d_i}{2} - d_j + \frac{d_i d_j}{2} \right) \\
 K_{66} &= \frac{4EI}{L} \left(1 - \frac{d_i}{4} - d_j + \frac{d_i d_j}{4} \right)
 \end{aligned}$$

EI é o produto de rigidez à flexão;

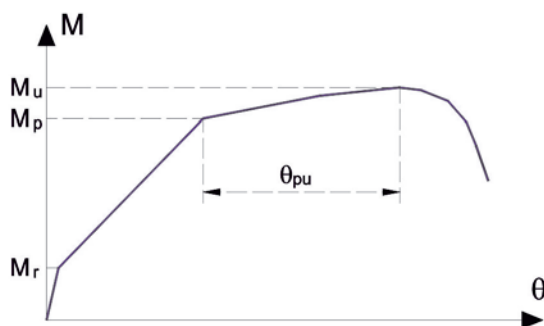
A é a área da seção transversal da barra;

L é o comprimento da barra.

A figura 2 ilustra, a partir da curva momento-rotação de uma seção de concreto armado, os principais parâmetros de entrada do modelo constitutivo em questão. Em situação de projeto, tais parâmetros podem ser obtidos com o cálculo clássico de seções armadas e com as hipóteses usuais do Estado Limite Último para solicitações normais.

Para o cálculo da rotação plástica última, pode-se utilizar as curvas apresentadas pela NBR 6118 em seu item 14.6.5 para a obtenção da capacidade de rotação de rótulas plásticas ou pode-se utilizar a expressão simplificada da Equação (6). Entretanto, cabe frisar que a capacidade de rotação plástica de elementos de concreto armado sofre a influência de diversos fatores, a saber: das propriedades de aderência entre aço-concreto, da resistência e ductilidade dos aços das armaduras, das propriedades mecânicas do concreto à tração e à compressão, do efeito da força cortante, forma da seção transversal, da esbelteza e tamanho da peça, dentre outros. O cálculo rigoroso da capacidade de rotação plástica torna-se, dessa forma, uma tarefa mais complexa. Diversos trabalhos experimentais e teóricos relacionados com a capacidade de

Figura 2 – Principais parâmetros do modelo constitutivo



Parâmetros do modelo teórico

M_r = momento de fissuração

M_p = momento de plastificação

M_u = momento último

θ_{pu} = rotação plástica última
(capacidade de rotação plástica)

rotação plástica podem ser citados, entre eles os de Dilger [28], Bachmann [29], Langer [30], Hillerborg [31, 32], Kreller [33], Longfei [34] e Sigrist [35].

A dissipação decorrente dos processos de evolução da danificação e das deformações plásticas atendem aos princípios da termodinâmica dos sólidos. Detalhes sobre o procedimento de identificação das leis de evolução das variáveis de dano e plasticidade podem ser encontrados nos trabalhos anteriormente mencionados [18, 25 e 26].

A fim de aprimorar a resposta numérica do modelo teórico, foram propostas no trabalho de Alva [17] modificações nas leis de evolução das variáveis de dano, criando-se o parâmetro adimensional (γ). Essa constante depende do tipo de elemento estrutural e mostrou ser bastante influenciada pela taxa de armadura longitudinal de tração em diversas análises com resultados experimentais. A função limite proposta em Alva [17] para a evolução da danificação é dada pela Equação (2):

$$g = G - R \quad (2)$$

onde:

G é o momento termodinâmico, dado por $G = \frac{1}{2S} \left(\frac{M}{1-d} \right)^2$

$$S = 4EI / L$$

M é o momento fletor atuante na extremidade do elemento;

$$R = G_{cr} - f \cdot q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)}$$

$$G_{cr} = \frac{M_r^2}{2S}$$

M_r é o momento de fissuração da seção;

$$f = e^{-\gamma(1-d)}$$

γ é o parâmetro introduzido ao modelo simplificado.

Deve-se notar que, quanto maior o valor de γ , maior a evolução do dano. O valor de γ deve ser escolhido de modo a representar com mais eficácia a resposta experimental observada no elemento estrutural. Assim, o adimensional γ não é um parâmetro livre. Para a situação de projeto estrutural, sugere-se que o valor de γ escolhido baseie-se na taxa de armadura longitudinal de tração, segundo o confronto de resultados numéricos e experimentais do item 3 deste trabalho.

A função limite que controla a evolução das rotações plásticas não foi modificada e é apresentada pela Equação (3).

$$f = M - \alpha \frac{1-d}{4-d} c\theta_p - \frac{1-d}{4-d} [(1-\alpha)cp + 4M_y] \quad (3)$$

onde:

α é uma constante do elemento que varia entre 0 e 1, sendo obtida experimentalmente. Para elementos de concreto armado em geral, recomenda-se o valor de 0,8;

θ_p é a rotação plástica na rótula;

p é o valor absoluto da máxima rotação plástica atingida pela rótula durante toda a história de carregamento.

As constantes c , M_y e q caracterizam o elemento estrutural e são calculadas, sem grandes dificuldades, por meio da resolução do seguinte sistema de equações não-lineares:

$$M = M_r \Rightarrow d = 0 \text{ and } g = 0$$

$$M = M_p \Rightarrow \theta_p = 0; \quad g = 0 \text{ and } f = 0$$

$$M = M_u \Rightarrow dM = 0 \text{ and } g = 0$$

$$M = M_u \Rightarrow \theta_p = \theta_{pu}; \quad g = 0 \text{ and } f = 0$$

Com base nas leis de evolução da plastificação e do dano, pode-se deduzir as expressões dos incrementos das variáveis de dano e das rotações plásticas:

$$dd = \frac{dG}{\partial R} \quad (4)$$

$$d\theta_p = \frac{dM + \frac{3}{(4-d)^2} (\alpha c\theta_p + (1-\alpha)cp + 4M_y) dd}{\alpha c \left(\frac{1-d}{4-d} \right)} \quad (5)$$

onde

$$\frac{\partial R}{\partial d} = \gamma \cdot e^{-\gamma(1-d)} \cdot q \cdot \left[\frac{\ln(1-d)}{(1-d)} \right] + e^{-\gamma(1-d)} \cdot q \cdot \left[\frac{\ln(1-d)-1}{(1-d)^2} \right]$$

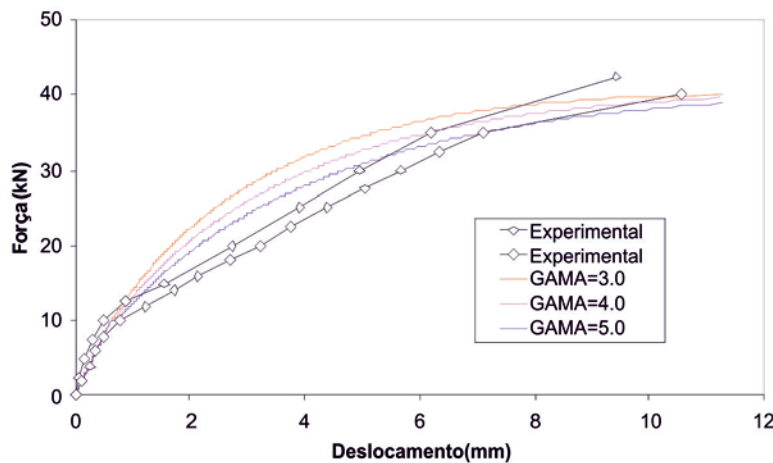
As leis de evolução da plastificação, assim como as leis de evolução do dano, devem ser aplicadas de forma independente para as ações positivas e as negativas nas duas extremidades do elemento.

É importante destacar que o modelo abordado foi desenvolvido para elementos de viga, mas também será aplicado a elementos de pilar neste trabalho, admitindo-se que estes estejam submetidos predominantemente à flexão e que o nível de esforço axial seja pequeno. No caso de elementos submetidos a forças normais significativas, estudos posteriores são necessários para avaliar a perda de rigidez axial e de flexão (com base em diagramas momento-normal-curvatura, ou a partir da integração das tensões no concreto e nas armaduras ao longo da seção), de forma a tornar mais geral o emprego do modelo de dissipação concentrada em estruturas de concreto.

3. Resultados experimentais e teóricos

A fim de validar o modelo teórico, devem-se confrontar os resultados fornecidos pelo modelo de dissipação concentrada com resultados experimentais obtidos de ensaios em estruturas de concreto

Figura 3 – Comparação de resultados numéricos e experimentais: viga com 3 ϕ 10mm – Álvares (14)



Viga pouco armada

Parâmetros:

$$M_r = 8,00 \text{ kN.m}$$

$$M_p = 32,00 \text{ kN.m}$$

$$M_u = 32,00 \text{ kN.m}$$

$$\theta_{pu} = 0,009 \text{ rad}$$

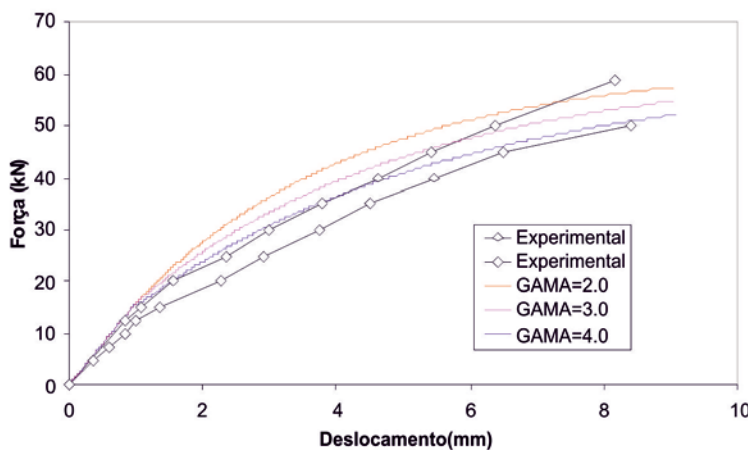
armado. Diversas comparações entre resultados teóricos e experimentais podem ser encontrados nos trabalhos de Cipollina e Flórez-López [25], Flórez-López [27] e Picón e Flórez-López [36], envolvendo inclusive o caso de carregamento cíclico. Posteriormente, nas teses de doutoramento de Alva [17] e de Araújo [18] foram propostos alguns aprimoramentos nos modelos de dissipação concentrada originais com o objetivo de reproduzir com mais fidelidade a resposta numérica quando comparada à experimental. As funções limites do modelo foram implementadas em programa computacional desenvolvido em linguagem FORTRAN para a análise não-linear de pórticos planos, empregando procedimento incremental-iterativo com controle de forças ou com controle de deslocamentos, conforme conveniência da análise e ou em função da resposta prevista para a estrutura. Para a solução numérica do problema não-linear, empregou-se o procedimento incremental-

iterativo de Newton-Raphson Padrão, no qual a matriz de rigidez tangente é atualizada a cada iteração. Foram utilizados dois critérios de convergência: o que envolve a norma do vetor resíduo (forças) e o que envolve a norma da variação dos deslocamentos nodais da iteração.

Apresentam-se nas figuras 3 a 5 o confronto entre os resultados numéricos do modelo de dissipação concentrada e os resultados experimentais de vigas de concreto armado simplesmente apoiadas ensaiadas por Álvares [14]. Foram ensaiadas vigas com três taxas diferentes de armaduras longitudinais de tração (vigas pouco armada, normalmente armada e superarmada) a fim de avaliar a influência da quantidade de armadura sobre a resposta do modelo teórico.

Observa-se pelas figuras 3 a 5 que o modelo consegue reproduzir de forma satisfatória o comportamento não-linear observado na curva força-deslocamento, especialmente para carregamentos próximos

Figura 4 – Comparação de resultados numéricos e experimentais: viga com 5 ϕ 10mm – Álvares (14)



Viga normalmente armada

Parâmetros:

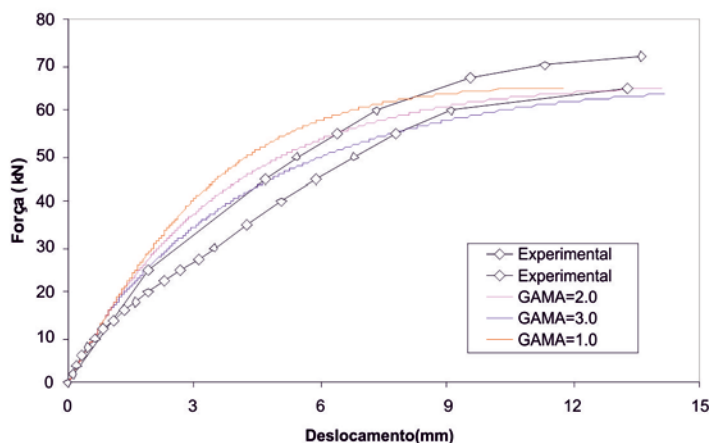
$$M_r = 10,00 \text{ kN.m}$$

$$M_p = 48,00 \text{ kN.m}$$

$$M_u = 48,00 \text{ kN.m}$$

$$\theta_{pu} = 0,010 \text{ rad}$$

Figura 5 – Comparação de resultados numéricos e experimentais: viga com 7 ϕ 10mm – Álvares (14)



Viga *superarmada*

Parâmetros:

$$M_r = 12,00 \text{ kN.m}$$

$$M_p = 52,00 \text{ kN.m}$$

$$M_u = 52,00 \text{ kN.m}$$

$$\theta_{pu} = 0,013 \text{ rad}$$

da ruptura da viga. O modelo numérico também permite uma boa previsão da carga de ruptura (ou carregamento máximo) da viga.

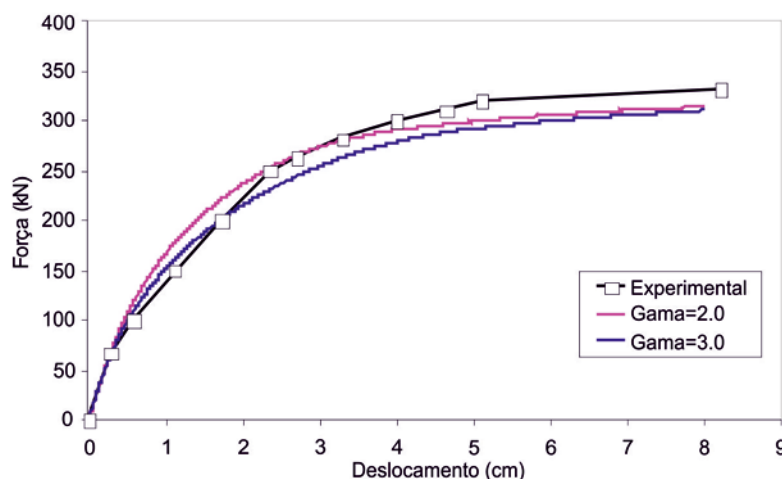
As figuras 3 a 5 e resultados experimentais não apresentados neste trabalho indicam que o valor do parâmetro adimensional γ que melhor se ajusta às curvas experimentais cresce com a diminuição da quantidade de armadura longitudinal dos elementos. No caso das vigas, quanto menor a quantidade de armadura longitudinal de tração, maior o valor do coeficiente adimensional γ - consequência da maior deterioração mecânica da viga de concreto.

Na figura 6 são apresentados os resultados do modelo numérico e os resultados experimentais encontrados em Vecchio e Emara [37] referentes a um pórtico de concreto armado com dois lances de altura e um lance de vão na horizontal. O carregamento consistiu na aplicação de forças verticais axiais de 700 kN nos pilares para simular o efeito das ações gravitacionais e de uma

força F horizontal na direção do eixo da viga superior, medindo-se o deslocamento horizontal do pórtico. Maiores detalhes sobre os ensaios podem ser encontrados em Vecchio e Emara [37].

Nas simulações numéricas, empregou-se o mesmo valor do parâmetro adimensional γ para vigas e pilares: $\gamma = 2,0$ em uma primeira simulação e $\gamma = 3,0$ em uma segunda simulação. Estes valores foram escolhidos pelo fato de as vigas do pórtico de Vecchio e Emara [37] apresentarem taxas de armadura de tração próximas das vigas normalmente armadas de Álvares [14], para as quais os valores de $\gamma = 2,0$ e $\gamma = 3,0$ conduziram a resultados teóricos próximos da curva experimental força-deslocamento. A comparação entre as curvas força-deslocamento do modelo teórico com a curva experimental indica que o modelo de dissipação concentrada consegue reproduzir aproximadamente o comportamento não-linear da estrutura, além de prever satisfatoriamente o carregamento máximo resistido pela estrutura.

Figura 6 – Curvas força-deslocamento horizontal – Pórtico de Vecchio e Emara (37)



Parâmetros: vigas

$$M_r = 28,00 \text{ kN.m}$$

$$M_p = 161,00 \text{ kN.m}$$

$$M_u = 189,00 \text{ kN.m}$$

$$\phi_{pu} = 0,0167 \text{ rad}$$

$$\gamma = 2,0 \text{ e } 3,0$$

Parâmetros: pilares

$$M_r = 69,00 \text{ kN.m}$$

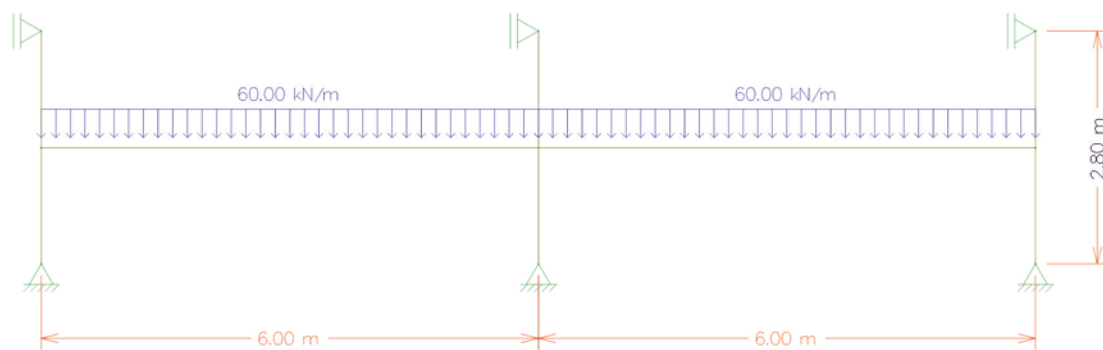
$$M_p = 253,00 \text{ kN.m}$$

$$M_u = 273,00 \text{ kN.m}$$

$$\phi_{pu} = 0,0060 \text{ rad}$$

$$\gamma = 2,0 \text{ e } 3,0$$

Figura 7 – Esquema estático da estrutura analisada



Vale salientar que todos os parâmetros do modelo numérico foram calculados a partir dos valores médios de resistência e de deformabilidade dos materiais estruturais, uma vez que o objetivo foi o confronto com resultados experimentais.

4. Aplicação em procedimentos de projeto

Para as simulações numéricas apresentadas nos exemplos 1 e 2 deste trabalho, as análises não-lineares foram realizadas com controle de força, em procedimento incremental-iterativo (Newton-Raphson Padrão). O carregamento foi dividido em 20 incrementos iguais. A tolerância estipulada, tanto para o critério de deslocamentos quanto para o critério de resíduo de forças, foi de 10^{-4} . Nos dois exemplos desenvolvidos, o tempo de processamento não superou 10s, executados em computador com processador Pentium IV 1800 MHz.

4.1 Exemplo 1

Neste exemplo emprega-se o modelo de dissipação concentrada em verificação do Estado Limite Último (solicitações normais), especificamente com relação às armaduras longitudinais necessárias para as solicitações de momento fletor. O exemplo trata de

uma viga contínua submetida a ações verticais e suportada por três pilares (figuras 7 e 8). Neste caso específico, supõe-se que as ações horizontais de vento e de desaprumo sejam desprezíveis, o que justifica o emprego do modelo de pórtico reduzido da figura 7, admitindo um pé-direito estrutural de 2,80m. Supõe-se que, para a combinação mais crítica do Estado Limite Último, a viga estará submetida a uma ação vertical de cálculo de 60 kN/m. A viga possui seção transversal retangular 20cm x 50cm e altura útil de 46cm. Os pilares de extremidade possuem seção retangular 20cm x 40cm (com flexão no eixo de maior inércia) e o pilar central seção retangular quadrada 40cm x 40cm. Foram empregados os mesmos materiais para a viga e para os pilares: concreto C25 e aço CA-50 para as armaduras longitudinais.

Com os momentos fletores determinados a partir de análise linear elástica (figura 8), foram dimensionadas as armaduras longitudinais das vigas nas seções de momento negativo (apoios) e nas seções de momento positivo no Estado Limite Último. Com o diagrama de momentos fletores da análise elástico-linear, foi determinada também a posição das rótulas do modelo (figura 9), definidas a partir das seções de momento máximo.

Na análise linear (com ou sem redistribuição de esforços), o dimensionamento das armaduras nas regiões dos apoios deve respeitar as condições de ductilidade, apresentadas no item 14.6.4.3 da NBR 6118. Para concretos com f_{ck} menores que 35 MPa, a

Figura 8 – Diagrama de momentos fletores (kN.m): previsão inicial com análise elástico-linear

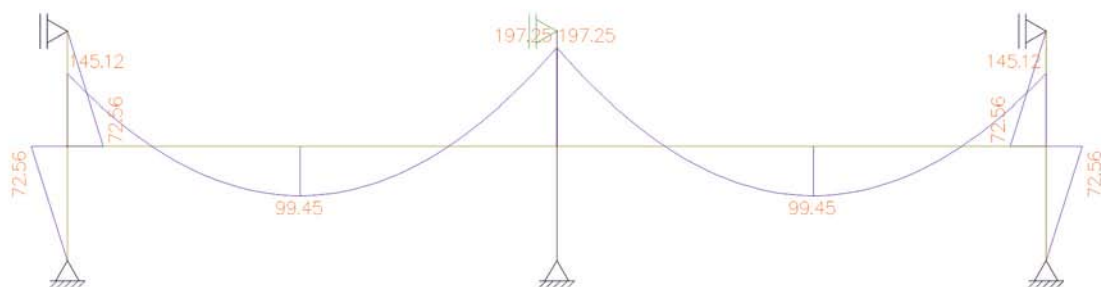
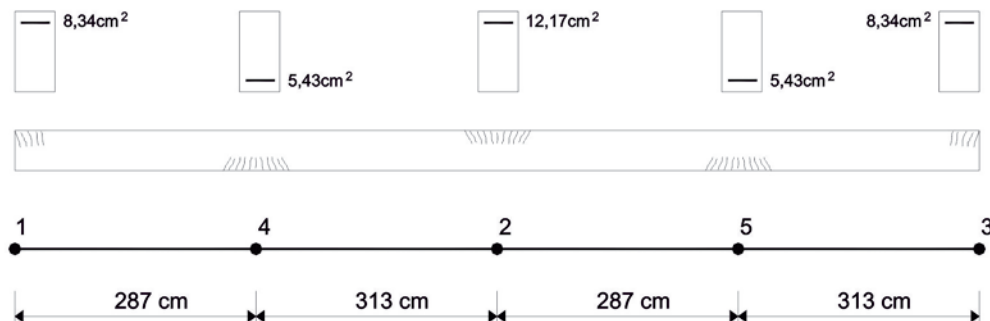


Figura 9 – Armaduras e posição das rótulas: previsão inicial com análise elástico-linear



relação entre a profundidade da linha neutra e a altura útil (x/d) deve ser menor que 0,5. Verificando a condição de ductilidade nos apoios, tem-se:

Seção do apoio de extremidade:

Seção do apoio central:

$$x = 14,93\text{cm} \Rightarrow \frac{x}{d} = \frac{14,93}{46} = 0,325 \quad x = 21,78\text{cm} \Rightarrow \frac{x}{d} = \frac{21,78}{46} = 0,473$$

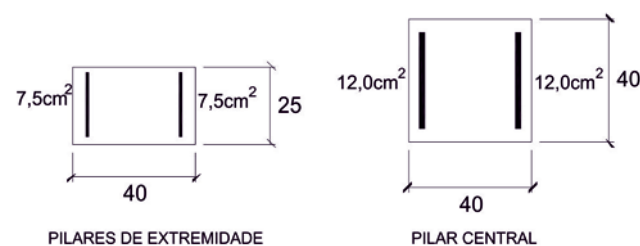
Portanto, o dimensionamento atende à condição de ductilidade. Para os pilares foram adotadas armaduras simétricas conforme a figura 10, as quais foram mantidas constantes em todas as análises.

Com as armaduras calculadas, é possível definir todos os parâmetros de entrada do modelo, os quais foram determinados com o cálculo clássico de seções armadas, incluindo as hipóteses do Estado Limite Último para solicitações normais segundo a NBR 6118. Foram utilizados os valores de cálculo do Estado Limite Último para as resistências dos materiais aço e concreto. Assim, nos parâmetros de entrada do modelo numérico, já estão embutidos os coeficientes de ponderação das resistências do aço e do concreto. A tabela 1 contém os parâmetros do modelo, obtidos pelo cálculo usual de seções armadas.

As rotações plásticas últimas das seções foram calculadas por meio de procedimento simplificado, conforme recomendado em Ibracon [38]:

$$\theta_{pu} = \left(\frac{\varepsilon_{cu}}{x_u} - \frac{\varepsilon_{cp}}{x_p} \right) \cdot L_p \quad (6)$$

Figura 10 – Armaduras dos pilares em todas as análises



onde

L_p é o comprimento plástico equivalente, o qual pode ser assumido igual a d ;

ε_{cu} é a deformação na fibra mais comprimida do concreto para o momento último M_u ;

ε_{cp} é a deformação na fibra mais comprimida do concreto no início do escoamento das armaduras tracionadas (para o momento M_p);

x_u é a profundidade da linha neutra para o momento último M_u ;

x_p é a profundidade da linha neutra para o momento de plastificação M_p .

Com as armaduras inicialmente calculadas a partir de uma análise elástico-linear, deseja-se avaliar qual o máximo carregamento vertical que pode ser aplicado à viga para que a mesma atinja o Estado

Tabela 1 – Parâmetros de entrada do modelo teórico: estimativa a partir de análise elástico-linear

Seção	M_r (kN.cm)	M_p (kN.cm)	M_u (kN.m)	θ_{pu} (rad)
Extremidade	16,03	142,23	145,12	0,00692
Apoio Central	16,03	191,10	197,25	0,00158
Momento positivo	16,03	98,22	99,45	0,00978

Tabela 2 – Resultados para carga vertical da combinação última de ações: 60 kN/m

Apoio	Análise não-linear		Análise elástico-linear
	Momento fletor (kN.m)	Rotação plástica (rad)	Momento fletor (kN.m)
Extremidade	142,46	0,000270	145,12
Central	190,08	0	197,25

Figura 11 – Armaduras escolhidas após análise não-linear

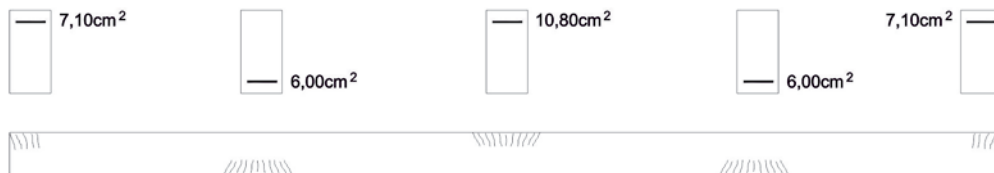


Tabela 3 – Parâmetros de entrada do modelo teórico: armaduras escolhidas após análise não-linear

Seção	M_i (kN.cm)	M_p (kN.cm)	M_u (kN.m)	θ_{pu} (rad)
Extremidade	16,03	124,21	126,30	0,00935
Apoio Central	16,03	174,84	179,68	0,00349
Momento positivo	16,03	107,30	108,79	0,0100

Limite Último, empregando-se agora uma análise não-linear (modelo de dissipação concentrada). Esta avaliação permitirá explorar a reserva de resistência da estrutura dimensionada com análise linear elástica, respeitando-se ainda a capacidade de rotação plástica das seções. Aplicou-se um carregamento crescente uniformemente distribuído (processo incremental-iterativo) até que a rotação plástica calculada pelo modelo numérico atingisse a capacidade de rotação plástica em alguma das seções da estrutura. Assim, o carregamento máximo resistido pela estrutura com o modelo de dissipação concentrada foi de 62,62kN/m, sendo a seção da viga do apoio central a primeira a alcançar a sua capacidade de rotação plástica.

Com base na carga vertical máxima que pode ser suportada pela estrutura e na comparação dos resultados dos dois tipos de análise (tabela 2), percebe-se que, de fato, a estrutura possui uma reserva de resistência além da necessária para suportar a ação uniformemente distribuída da combinação última (60kN/m). Ou seja, para este valor de ação, ainda não foram atingidos os momentos resistentes das seções e tampouco a capacidade de rotação plástica das mesmas.

Com o objetivo de reduzir o consumo de aço, pode-se testar seções com áreas de armaduras menores que as calculadas com a análise elástica linear na região dos apoios, até que a carga vertical máxima

obtida pelo modelo seja aproximadamente igual à carga vertical de projeto. Ou seja, com o emprego do modelo de dissipação concen-

Figura 12 – Análise linear vs análise não-linear: curva carga-deslocamento

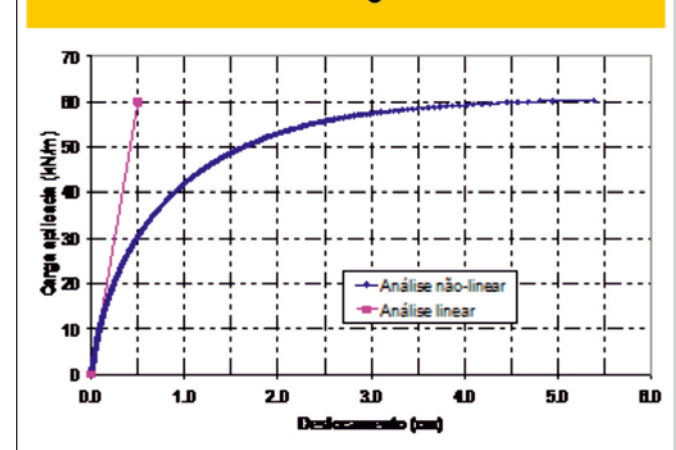


Tabela 4 – Resultados finais para carga vertical da combinação última de ações: 60 kN/m

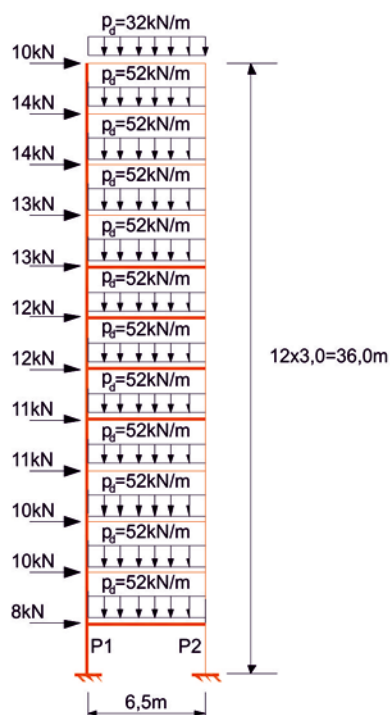
Apoio	Análise não-linear: modelo de dissipação concentrada			Análise elástico-linear	Coeficiente de redistribuição
	Momento fletor (kN.m)	Rotação plástica (rad)	Dano	Momento fletor (kN.m)	
Extremidade	125,90	0,00563	0,857	145,12	0,868
Central	179,51	0,00210	0,823	197,25	0,910

trada, pode-se encontrar armaduras para a viga que permitam à estrutura suportar as cargas verticais da combinação última (60 kN/m) respeitando-se a capacidade de rotação plástica das seções. A título de exemplo, reduziu-se de 8,34 cm² para 7,10 cm² a área de armadura das seções de extremidade da viga e de 12,17 cm² para 10,80 cm² a área de armadura do apoio central, aumentando-se a área de armadura positiva de 5,43 cm² para 6,00 cm² (figura 11) em virtude da redistribuição de momentos. A tabela 3 contém os valores dos parâmetros do modelo para as novas áreas de armadura.

Novamente, aplicando à viga um carregamento crescente em procedimento incremental-iterativo implementado em programa

computacional, chega-se a uma carga vertical máxima de 60,36 kN/m (figura 12), sendo a seção da viga do apoio central a primeira a atingir a capacidade de rotação plástica. Logo, as armaduras escolhidas para a viga permitem à estrutura resistir às ações de cálculo do Estado Limite Último e atendem às condições de ductilidade. Em relação à análise elástico-linear, o dimensionamento da viga com a aplicação do modelo de dissipação concentrada (análise não-linear) resultou em uma redução de 15% de área das armaduras negativas do apoio de extremidade e de 11% de área das armaduras negativas do apoio central. Na tabela 4 são apresentados os resultados da análise para a combinação última.

Figura 13 – Pórtico plano analisado



Pórtico:

Vão de 6,5m e distância entre pisos de 3,0m.

Pilares:

seção retangular 30x60cm;
momentos iniciais em torno do eixo de maior inércia;

Vigas:

seção retangular 25x65cm;

Materiais:

Concreto C25 (para vigas e pilares)
Aço CA-50

Ações na estrutura:

Para os pavimentos de 1 a 11:

Permanentes: $g = 30\text{kN/m}$

Sobrecarga: $q = 12\text{kN/m}$

Para o último pavimento:

Permanentes: $g = 18\text{kN/m}$

Sobrecarga: $q = 8\text{kN/m}$

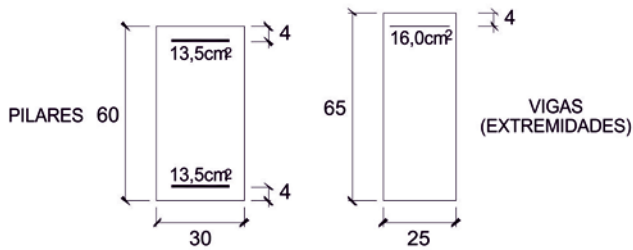
Vento: forças aplicadas nos nós conforme a figura ao lado.

Combinação considerada:

$$p_d = 1,4 \times g + 1,4 \times (0,6 \times q + F_{\text{vento}})$$

(vento: ação variável principal)

Figura 14 – Seções transversais empregadas na análise numérica. Medidas em cm.



Uma das vantagens da análise não-linear com o modelo de dissipação concentrada em relação à análise linear com redistribuição

é que a redução dos momentos negativos ocorre naturalmente em função da perda de rigidez das seções – mensuradas por meio das variáveis de dano - e em função das rotações plásticas capturadas pelo modelo. Logo, o modelo numérico não requer uma imposição arbitrária do coeficiente de redistribuição, evitando-se assim o risco de introduzir uma redistribuição de momentos discrepante ou aleatória. Além disso, a aplicação do modelo numérico possibilita ao projetista maior controle da ductilidade dos elementos estruturais, uma vez que o modelo requer a avaliação da capacidade de rotação plástica das seções mais solicitadas como parâmetro de entrada.

4.2 Exemplo 2

Neste exemplo procura-se simular uma situação típica no projeto de edifícios de múltiplos pavimentos, onde a consideração da não-linearidade física é necessária para a análise do comportamento global do edifício, em particular para a avaliação dos esforços

Figura 15 – Valores de dano nas extremidades das barras (rótulas)

	0,0565	0,1066			0,104312	0,1834	
0,0602			0,1203	0,1111			0,2040
0,0707	0,1749	0,2942	0,0725	0,1347	0,270356	0,3985	0,1322
0,0000			0,0876	0,0000			0,1650
0,0231	0,1303	0,3342	0,0539	0,0552	0,214563	0,4370	0,1078
0,0000			0,0711	0,0000			0,1387
0,0000	0,0854	0,3739	0,0367	0,0000	0,151048	0,4722	0,0799
0,0000			0,0546	0,0000			0,1109
0,0000	0,0440	0,4119	0,0190	0,0000	0,080361	0,5049	0,0452
0,0000			0,0359	0,0000			0,0759
0,0000	0,0120	0,4470	0,0000	0,0000	0,0135	0,5352	0,0000
0,0000			0,0100	0,0000			0,0154
0,0000	0,0000	0,4777	0,0000	0,0000	0,0000	0,5596	0,0000
0,0000			0,0000	0,0000			0,0000
0,0000	0,000000	0,5053	0,0000	0,0000	0,000000	0,5816	0,0000
0,0000			0,0000	0,0000			0,0000
0,0000	0,000000	0,5294	0,0000	0,0000	0,0000	0,6008	0,0000
0,0000			0,0000	0,0000			0,0000
0,0000	0,000000	0,5470	0,0000	0,0000	0,0093	0,6139	0,0000
0,0000			0,0000	0,0000			0,0000
0,0000	0,000125	0,5505	0,0000	0,0000	0,0098	0,6156	0,0000
0,0000			0,0000	0,0000			0,0000
0,0000	0,000000	0,5058	0,0000	0,000000	0,000000	0,5784	0,0000
0,0000			0,0000				0,0000
	$\gamma = 2,0$		0,000000		$\gamma = 3,0$		0,0000

Figura 16 – Deslocamentos horizontais do edifício

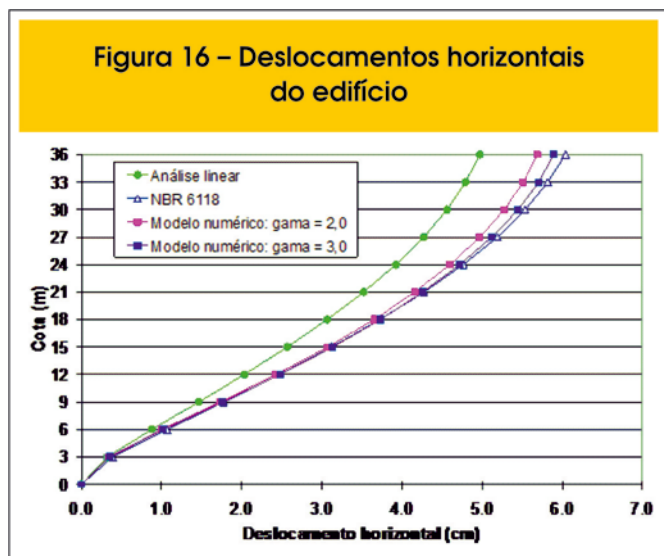
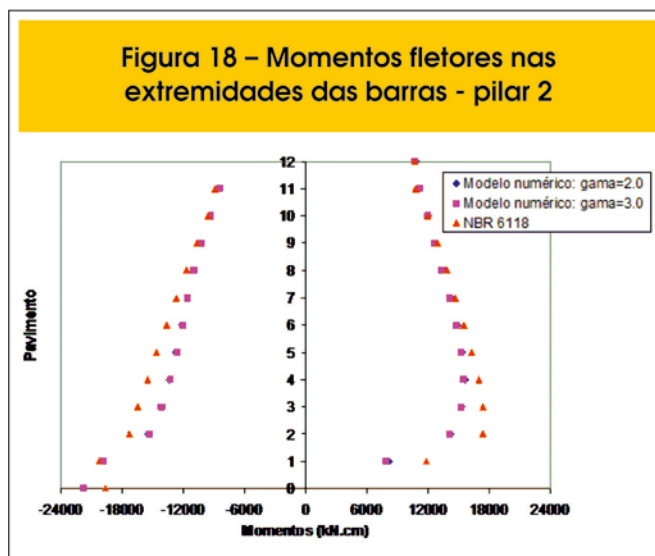


Figura 18 – Momentos fletores nas extremidades das barras - pilar 2



globais de segunda ordem. A estrutura em questão consiste em um pórtico plano submetido a ações verticais (permanentes e sobrecarga de uso) e horizontais (ações do vento), escolhendo-se o vento como a ação variável principal na combinação última de ações analisada. Embora se trate de uma estrutura com geometria muito simples (figura 13), o intuito deste exemplo é fornecer uma noção quantitativa dos resultados fornecidos pelo modelo para este tipo de verificação, comparando-os com os resultados obtidos por meio de procedimentos recomendados pela NBR 6118 para a consideração aproximada da não-linearidade física.

As seções e as armaduras dos elementos estruturais foram pré-dimensionadas a partir de uma análise elástica linear preliminar. Por simplicidade, admitiram-se para os pilares armaduras longitudinais concentradas em duas bordas (figura 14) e mesma seção transversal em toda a altura do pórtico.

Com as seções e armaduras pré-definidas, foi possível determinar os parâmetros do modelo de dissipação concentrada para o emprego da análise não-linear. Foram utilizados nas simulações

numéricas $\gamma = 2,0$ e $\gamma = 3,0$ - iguais tanto para vigas quanto para pilares - tendo em vista as boas correlações com os resultados experimentais apresentados anteriormente.

Para este exemplo, foram aplicados três tipos de análise:

- Análise elástico-linear, sem qualquer redução de inércia de seções;
- Análise simplificada para considerar a não-linearidade física prescrita pela NBR 6118, empregando uma rigidez à flexão reduzida de 0,7.Eci.Ic para vigas e pilares;
- Análise não-linear (física) com o emprego do modelo de dissipação concentrada.

Na combinação de ações analisada, os efeitos de segunda ordem globais não foram considerados, uma vez que as comparações deste trabalho visam a não-linearidade física. Entretanto, cabe ressaltar que, em uma situação real de projeto, os efeitos de segunda ordem devem ser considerados.

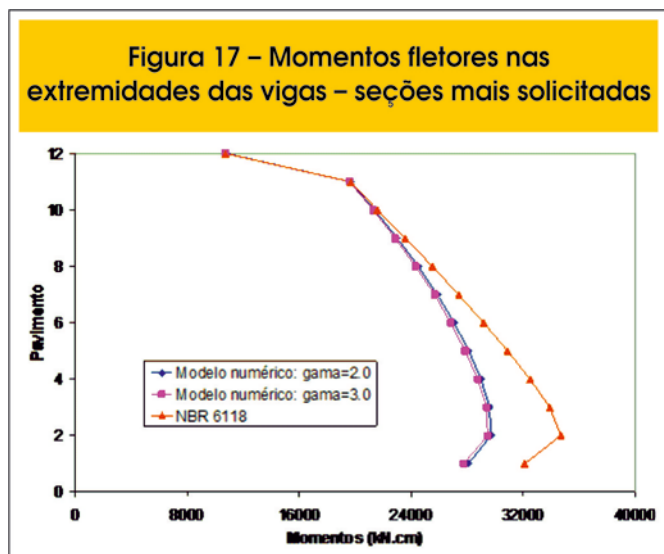
Na figura 15 estão indicados os valores das variáveis de dano dos elementos estruturais resultantes da análise não-linear. Cabe salientar que o modelo não captura a perda de rigidez nos elementos em que o nível de esforço normal é elevado, como nos pilares inferiores do pórtico.

Em relação aos deslocamentos (figura 16), o modelo de dissipação concentrada conduziu a valores muito próximos dos obtidos com a análise simplificada proposta pela NBR 6118.

Entretanto, ainda que sejam pequenas as diferenças entre os deslocamentos fornecidos por uma análise não-linear e por uma análise simplificada com redução global de rigidez, as diferenças podem ser relevantes em termos de esforços solicitantes. Tais diferenças podem ser percebidas, por exemplo, no gráfico dos momentos negativos máximos nas extremidades das vigas ao longo dos pavimentos, conforme a figura 17.

A diminuição da rigidez à flexão dos elementos - avaliada pelo modelo teórico por meio da variável de dano nas extremidades - produz uma redistribuição de esforços na estrutura. Essa redistribuição é evidenciada na figura 17 pela alteração (redução) dos momentos fletores nas seções críticas em relação aos momentos previstos pela análise linear elástica. Neste exemplo em particular, observou-se uma redução de momentos solicitantes em torno de 15% para as vigas mais próximas das fundações.

Figura 17 – Momentos fletores nas extremidades das vigas – seções mais solicitadas



A partir desta etapa, novas soluções poderiam ser propostas pelo projetista, que pode interferir diretamente no arranjo e na quantidade de armaduras visando economia no consumo das armaduras, especialmente nas armaduras de momentos negativos das vigas mais solicitadas.

Com relação aos pilares, as diferenças entre o modelo simplificado da NBR 6118 e o modelo de dissipação concentrada foram menores que as observadas nas vigas (figura 18). Entretanto, vale destacar que a maior perda de rigidez das vigas em relação aos pilares traz como consequência maiores solicitações por momentos nas seções dos pilares mais próximos às fundações. Neste exemplo, os momentos nessas seções obtidos pela análise não-linear foram cerca de 10% maiores que os momentos obtidos com o procedimento simplificado proposto pela NBR 6118.

5. Conclusões

Este trabalho trata da investigação do emprego de modelos constitutivos de dano, especificamente os modelos de dissipação concentrada, em análise não-linear das estruturas reticuladas planas de concreto armado. Os resultados apresentados mostram o potencial do modelo numérico para aplicações em procedimentos de projeto, especialmente em situações que corresponderiam ao Estado Limite Último.

Embora seja um modelo simples, considera a não-linearidade física de forma mais consistente que a simplificação da NBR 6118, uma vez que a penalização (perda) de rigidez é feita em função dos esforços atuantes. Os parâmetros de entrada requeridos pelo modelo, embora poucos, possuem significado físico claro à maioria dos engenheiros estruturais e que levam em conta fatores importantes em análises não-lineares de estruturas de concreto, como taxas de armaduras e parâmetros associados à ductilidade – como a capacidade de rotação plástica das seções. A utilização do modelo abordado para análise não-linear apresenta vantagens em relação à análise linear com redistribuição, permitindo ao projetista maior controle sobre a ductilidade da estrutura.

Destaca-se que o modelo abordado neste trabalho, embora tenha sido desenvolvido para elementos de viga, também foi aplicado aos pilares nos exemplos numéricos, supondo-se que estes estivessem predominantemente submetidos à flexão. No caso de elementos submetidos a esforços normais significativos, estudos posteriores são necessários para avaliar a perda de rigidez, considerando a interação entre esforço axial e momentos fletores, de forma a tornar mais geral o modelo de dissipação concentrada em estruturas de concreto.

6. Agradecimentos

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo apoio financeiro ao doutorado do primeiro autor.

7 Referências bibliográficas

- [01] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, ABNT, 2003.
- [02] PINTO, R.S. Análise não-linear das estruturas de contraventamento de edifícios de concreto armado. 2002. 189p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.
- [03] CARVALHO, R.C.; FIGUEIREDO FILHO, J.R.; PINHEIRO, M.A.; MIRANDA, L.R.; FILHO, S.N.. Consideração sobre o uso da plastificação nas seções de concreto armado de vigas – aplicação e análise de viabilidade para vigas contínuas. *In: Congresso Brasileiro do Concreto*, 47., 2005, Olinda. Anais... Olinda, 2005. 1 CD-ROM.
- [04] LOPES, S.M.R.; CARMO, R.N.F.; BERNARDO, L.F.A. Capacidade de rotação plástica em vigas de betão armado. *In: Ibero-American Symposium on Concrete for Structures*, 2., 2006, Rio de Janeiro. Anais..., Rio de Janeiro, 2006. 1 CD-ROM.
- [05] KACHANOV, L.M. Time of rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk, USSR* (em russo), n.8, p.26-31, 1958.
- [06] MAZARS, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Dr. Of Science thesis. University of Paris 6, 1984.
- [07] LA BORDERIE, C.; MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. Response of plain and reinforced concrete structures under cyclic loadings. Cachan, France, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Rapport Interne, n. 123, 1991.
- [08] DRIEMEIER, L. Considerações sobre a fadiga em metais e o comportamento do concreto sob solicitação cíclica. 1995. 120p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.
- [09] DRIEMEIER, L. Contribuição ao estudo da localização de deformações com modelos constitutivos de dano e plasticidade. 1999. 101p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.
- [10] BOTTA, A.S. Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas reticuladas considerando-se a mecânica do dano para a modelagem do concreto armado. 1998. 98p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.
- [11] PAULA, C.F. Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas. 2001. 128p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.
- [12] ARAÚJO, F.A. Contribuição ao emprego de mecânica do dano para a análise do comportamento dinâmico não-linear de vigas em concreto armado. 2003. 85p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- [13] NÓBREGA, P.G.B. Análise dinâmica de estruturas de concreto: estudo experimental e numérico das

- condições de contorno de estruturas pré-moldadas. 2004. 285p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- [14] ÁLVARES, M.S. Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos. 1993. 123p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.
- [15] ÁLVARES, M.S. Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado. 1999. 113p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.
- [16] PITUBA, J.J.C. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. 1998. 130p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- [17] ALVA, G.M.S. Estudo teórico-experimental do comportamento de nós de pórtico de concreto armado submetidos a ações cíclicas. 2004. 218p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- [18] ARAÚJO, F.A. Formulação de um modelo de dissipação concentrada para a análise não-linear de estruturas reticuladas planas em concreto armado. 2007. 232p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.
- [19] ALVA, G.M.S. Modelos de dissipação concentrada aplicados na análise estrutural de elementos lineares de concreto armado segundo a NBR 6118. *In: Congresso Brasileiro do Concreto*, 48., 2006, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro, 2006. 1 CD-ROM.
- [20] GIBERSON, M.F. The response of nonlinear multistory structures to earthquake excitation. Earthquake Engineering Research laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, USA, 1967.
- [21] OTANI, S. Inelastic analysis of R/C frame structures. *Journal of Structural Division, American Society of Civil Engineering*, v.100, n.(ST7), 1974.
- [22] SOLEIMANI, D.; POPOV, E.P.; BERTERO, V.V. Nonlinear beam model for R/C frame analysis. *Proceedings of the 7th Conference on Electronic Computation, American Society of Civil Engineering*, St. Louis, Missouri, 1979.
- [23] FILIPPOU, F.C.; ISSA, A. Nonlinear analysis of reinforced concrete frames under cyclic loads reversals. Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, USA, 1988.
- [24] FLÓREZ-LÓPEZ, J. Calcul simplifié de portiques endommageables. *Revue Européenne des Éléments Finitis*, v.2, n.1, p.47-74, 1993.
- [25] CIPOLLINA, A.; FLÓREZ-LOPÉZ, J. Modelos simplificados de daño en pórticos de concreto armado. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v.11, n.1, p.3-22, 1995.
- [26] CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A simplified damaged mechanics approach to nonlinear analysis of frames. *Computers and Structures*, v.54, n.6, p.1113-26, 1995.
- [27] FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified model of unilateral damage for RC frames. *Journal of Structural Engineering*, v.121, n.12, p.1765-72, 1995.
- [28] DILGER, W. Veränderlichkeit der Biege- und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluß auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung. *Schriftenreihe des DAfStb Heft 179*, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1966.
- [29] BACHMANN, H. Influence of shear and bond on rotational capacity of reinforced concrete beams. *IABSE Publications*, v. 30, n.II, pp. 28, 1970.
- [30] LANGER, P. Verdrehfähigkeit plastizierter Tragwerksbereiche im Stahlbetonbau. *Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, IWB-Mitteilungen*, 1987.
- [31] HILLERBORG, A. Rotational capacity of reinforced concrete beams. *Nordic Concrete Research (Oslo)*, n.7, p.121-34, 1988.
- [32] HILLERBORG, A. Fracture Mechanics concepts applied to moment capacity and rotational capacity of reinforced concrete beams. *Engineering Fracture Mechanics*, v.35, n.1/2/3, p. 233-40, 1990.
- [33] KRELLER, H. Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstabtragwerken unter Last- und Zwangseinwirkungen. *Dissertation, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart*, 1989.
- [34] LONGFEI, L. Rotationsfähigkeit von plastischen Gelenken im Stahl-un Spannbetonbau. *Dissertation, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart*, 1995.
- [35] SIGRIST, V. Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern. *IBK Bericht Nr. 210, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel*, 1995.
- [36] PICON, R.A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Evolucion de la degradacion de rigidez en porticos de concreto armado. *In: Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural*, 29., Punta del Leste. Anais... Punta del Leste, 2000. 1 CD-ROM.
- [37] VECCHIO, F.J.; EMARA, M.B. Shear deformations in reinforced concrete frames. *ACI Structural Journal*, v.89, n.1, p.46-56, 1992.
- [38] INSTITUTO BRASILEIRO DO CONCRETO. *Comentários Técnicos e Exemplos de Aplicação da NB-1*. IBRACON, São Paulo, 2007.