

# Computational modeling of steel fiber reinforced concrete beams subjected to shear

## Modelagem computacional de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço submetidas a cisalhamento



D. L. ARAÚJO <sup>a</sup>  
dlaraujo@eec.ufg.br

L. C. CARMO <sup>b</sup>  
luccarmo@gmail.com

F. G. T. NUNES <sup>c</sup>  
fgtiburcio@gmail.com

R. D. TOLEDO FILHO <sup>d</sup>  
toledo@coc.ufrj.br,

### Abstract

Computational modeling has become a common activity to Civil Engineering researchers and professionals. Therefore, the knowledge about the mechanical behavior of materials is very important. To correctly model the mechanical behavior of concrete structures subjected to shear stress, it is necessary to determine the shear retention factor that accounts for the friction between the two surfaces of a crack. The objective of this study is to show how the shear retention factor of steel fiber reinforced concrete can be obtained from direct shear tests associated to computational modeling. A concrete matrix with compressive strength of 60 MPa, to which 1% and 2% content of steel fibers were added, was used for the shear tests. The stress-slip relationship was obtained from these tests, and the shear retention factor of the steel fiber reinforced concrete was determined from inverse analysis using the Finite Element Method software DIANA<sup>®</sup> 8.1.2. Finally, the shear retention factor and the influence of steel fibers on the cracks were validated from the computational modeling of steel fiber reinforced concrete beams subjected to shear available in the literature.

**Keywords:** Shear, Steel Fiber Reinforced Concrete, Computational Modeling.

### Resumo

A modelagem computacional cada vez mais se torna parte integrante das atividades dos pesquisadores e profissionais da área de engenharia civil. Para isso, o conhecimento do comportamento mecânico dos materiais é de fundamental importância. No caso das estruturas de concreto submetidas a esforços de cisalhamento, para a correta representação do seu comportamento é necessária a determinação do fator de retenção do cisalhamento. Neste trabalho, procura-se determinar esse fator para concretos reforçados com fibras de aço por meio de ensaios de cisalhamento direto em corpos-de-prova prismáticos associados à modelagem computacional. Foi estudada, em laboratório, uma matriz de concreto com resistência à compressão de 50 MPa, à qual foram adicionadas 1,0% e 2,0% de fibras de aço. A relação tensão *versus* deslizamento foi determinada experimentalmente, sendo em seguida realizada uma análise inversa dos corpos-de-prova de modo a se determinar o fator de retenção do cisalhamento do concreto reforçado com fibras de aço. Para tanto, foi utilizado o programa comercial de elementos finitos DIANA<sup>®</sup> 8.1.2. Ao final, o fator de retenção do cisalhamento, bem como a influência das fibras na fissuração, foi validado por meio da modelagem de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço submetidas a esforços de cisalhamento disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** Cisalhamento, Concreto Reforçado com Fibras de Aço, Modelagem computacional.

<sup>a</sup> Professor Doutor, Programa de Pós-Graduação em Geotecnia e Construção Civil, Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, dlaraujo@eec.ufg.br, Praça Universitária, s/n, Setor Universitário, 74605-220, Goiânia, GO;

<sup>b</sup> Mestre, Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, luccarmo@gmail.com, Praça Universitária, s/n, Setor Universitário, 74605-220, Goiânia, GO;

<sup>c</sup> Mestre, Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, fgtiburcio@gmail.com, Praça Universitária, s/n, Setor Universitário, 74605-220, Goiânia, GO;

<sup>d</sup> Professor Doutor, COPPE/UFRJ, toledo@coc.ufrj.br, Caixa Postal 21945-970, Rio de Janeiro, RJ

## 1. Introdução

Atualmente, o uso de programas para a análise dos problemas de engenharia é indispensável. Engenheiros e pesquisadores cada vez mais procuram desenvolver formulações e códigos numéricos que permitam a simulação do comportamento das estruturas, procurando-se o estabelecimento de parâmetros que forneçam informações que gerem economia, segurança e rapidez nos projetos estruturais.

A análise numérica de estruturas de concreto armado é notadamente complexa. Por ser um material composto, o concreto armado possui características que dificultam a reprodução em um ambiente computacional de todas as variáveis presentes em uma situação de serviço (por exemplo, fissuração múltipla e escorregamento das armaduras). Desta maneira, surgem aproximações que, na sua maioria, suprem as principais necessidades (segurança e economia) do projeto de uma estrutura.

Abordando especificamente o estudo numérico do cisalhamento em estruturas de concreto armado, pode-se dizer que na literatura especializada encontra-se um grande número de trabalhos teóricos e experimentais sobre cisalhamento em vigas de concreto [1-3], porém trabalhos numéricos sobre esse tema não são tão comuns. Grande parte dos estudos sobre simulação computacional de estruturas de concreto aborda problemas de flexão [4], sendo que os estudos e modelos numéricos existentes para cisalhamento, na maioria das vezes, não são capazes de fornecer em detalhes as distribuições de tensões e de deformações ao longo da estrutura, bem como do panorama de fissuração.

Tradicionalmente, os modelos existentes para o tratamento de estruturas de concreto são baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF) [5]. Na análise de fissuração, por exemplo, os modelos baseados no MEF podem ser classificados em dois tipos: o modelo de fissuração distribuída (*smearred crack model*) e o modelo de fissuração discreta (*discrete crack model*).

O modelo de fissuração discreta é o método mais refinado e preferível quando se tem um número pequeno de fissuras na estrutura. No entanto, a grande dificuldade no seu emprego está no conhecimento do percurso de propagação da fissura e na necessidade de reorganização de malha do contínuo à medida do progresso das mesmas. A estratégia mais empregada é o modelo de fissura coesiva (*cohesive crack model*) desenvolvido por Hillerborg [6] para o modo I de fratura de materiais quase-frágeis (como o concreto) que depois foi adaptado para o modo misto de fratura (modos I e II) [7].

No modelo de fissuração distribuída, pioneiro na análise do problema de fissuração [8], um número grande de fissuras paralelas, teoricamente com aberturas infinitamente pequenas, são consideradas distribuídas sobre a malha de elementos finitos que modelam o meio contínuo que, por sua vez, permanece inalterada com a propagação das fissuras. Essa propagação é simulada por meio da perda de rigidez e de resistência (*softening*) do material do contínuo, sendo que as fissuras podem ser consideradas com ângulo de orientação definido (*fixed crack*) ou variável (*rotated crack*). Pesquisadores relatam que o modelo com fissura variável tende a apresentar uma estabilidade maior que o modelo com fissura fixa [9]. O modelo de fissuração distribuída é o mais difundido devido à simplicidade na consideração das fissuras. No entanto, apresenta alguns problemas de convergência de solução, sendo necessários ajustes nas relações matemáticas dos modelos constitutivos. Por

não considerar as fissuras como entidades discretas, o método também impede a determinação direta da abertura da fissura (dimensão perpendicular à direção de propagação).

No presente artigo, utilizando-se o programa comercial de elementos finitos DIANA® 8.1.2 [10], apresenta-se um estudo numérico sobre o cisalhamento em concretos reforçados com fibras de aço, empregando-se o modelo de fissuração distribuída. O programa DIANA® permite a consideração discreta de armaduras imersas no contínuo do problema e, dessa forma, as armaduras presentes em vigas de concreto podem ser analisadas como elementos finitos de barras, sendo possível a determinação de tensões e deformações sobre elas. Para a representação da transferência de esforços de cisalhamento pelas fissuras, é empregado o fator de retenção do cisalhamento, cujo valor é obtido por análise inversa de ensaios de cisalhamento direto.

## 2. Modelos empregados na modelagem computacional do concreto ao cisalhamento

Nesta seção, apresentam-se, sucintamente, alguns dos modelos numéricos empregados para a modelagem computacional de elementos de concreto com o programa DIANA® 8.1.2 [10] que é um programa computacional comercial baseado no Método dos Elementos Finitos para análise de diversos tipos de estruturas. Os modelos constitutivos para o concreto incluem efeitos de fissuração, armadura embutida ou a combinação destes. Além disso, o programa ainda permite a análise de outros fenômenos complexos, tais como, fluência, cura, temperatura e instabilidade.

Para a modelagem do comportamento estrutural do concreto fissurado existem dois modelos incorporados no programa: o modelo de fissuração distribuída e o modelo de fissuração discreta. Em ambos os modelos, são introduzidos conceitos da mecânica da fratura, de modo que os resultados obtidos ficam independentes da malha utilizada na discretização. Os principais parâmetros relacionados com a mecânica da fratura introduzidos no modelo de fissuração distribuída são as energias de fraturamento à tração ( $G_f^I$ ) e à compressão ( $G_c$ ) e a largura da banda de fissuração (*crack band*). Além da representação da relação constitutiva em termos energéticos, o programa DIANA® permite utilizar o modelo do CEB-FIP Model Code 1990 [11] e curvas definidas pelo próprio usuário. A largura da banda de fissuração, denotado por  $h$ , deve corresponder a uma dimensão representativa dos elementos da malha, sendo dependente do tipo do elemento e de sua forma.

O modelo de fissuração distribuída determina a abertura e a orientação das fissuras em um determinado ponto através dos "Modelos Incrementais ou Plásticos" e dos "Modelos *Total Strain*". Na formulação dos "Modelos *Total Strain*" recorre-se unicamente a uma relação constitutiva dependente das deformações em um dado instante. Dessa maneira, o grande atrativo dessa formulação é a sua simplicidade conceitual, sendo essa vertente representada no programa pelo "*Rotating Crack Model*" e pelo "*Fixed Crack Model*". Na formulação dos "Modelos Incrementais ou plásticos" costuma-se recorrer aos conceitos da "Teoria da Plasticidade", preferindo-se dividir as deformações em duas parcelas: elásticas (reversíveis) e plásticas (irreversíveis). O "*Multi-Directional Crack Model*", que é o representante desse grupo no programa DIANA®, apresenta grandes vantagens para os problemas bidimensionais [10].

**Tabela 1 - Composição da matriz de concreto (quantidades por m<sup>3</sup>)**

Material	Quantidade
Cimento CP III-40-RS (kg)	440
Sílica ativa (kg)	35
Areia Natural (kg)	817
Agregado graúdo (kg)	817
Água (kg)	198
Microfibra Wollastonita (kg) *	72,5 (2,5%)
Aditivo Superplastificante (kg)**	5,86 (1,2%)
Relação a/(cimento + sílica)	0,40

\*Fração volumétrica; \*\*Porcentagem, em massa, do cimento mais sílica ativa

Devido à fissuração do material, a sua rigidez ao cisalhamento é normalmente reduzida. Essa redução é normalmente conhecida no meio técnico como retenção ou conservação do cisalhamento (*shear retention*). O programa DIANA® oferece três relações para tratar esse efeito: retenção completa do cisalhamento, retenção constante do cisalhamento e retenção variável do cisalhamento. No caso de uma retenção completa do cisalhamento o módulo de elasticidade transversal  $G$  não é reduzido, o que implica que a rigidez ao cisalhamento secante da fissura é infinita. No caso da redução da rigidez de cisalhamento, o fator de retenção do cisalhamento  $\beta$  é menor que um, porém maior que zero. No caso da retenção variável de cisalhamento, o fator de retenção de cisalhamento é função da abertura da fissura [10].

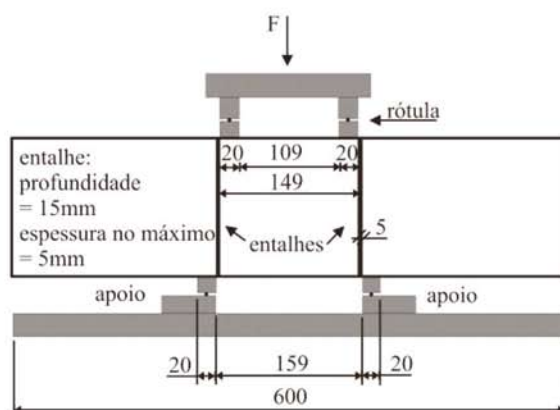
As armaduras das estruturas de concreto podem ser modeladas por meio de elementos especiais denominados "*embedded reinforcement*". Esses elementos possibilitam definir armaduras discretas

**Tabela 2 - Ensaio de cisalhamento em corpos-de-prova prismáticos**

Corpo-de-prova	Volume de fibras, $V_f$ (%)
CP-60-0-12,5	0,0
CP-60-1-12,5	1,0
CP-60-2-12,5	2,0

(barras ativas ou passivas) e distribuídas (malhas) em estruturas bi-dimensionais e tridimensionais. Com esses elementos, normalmente considera-se aderência perfeita entre o concreto e as armaduras, ou seja, elimina-se a possibilidade de escorregamento das armaduras. Na representação discreta da armadura, elementos uniaxiais são introduzidos nas interfaces dos elementos de concreto, com conexões rígidas ou com elementos de interface capazes de modelar a aderência e o deslizamento entre a armadura e o concreto.

Os modelos de fissuração distribuída não fornecem diretamente a abertura das fissuras. Entretanto, essa abertura pode ser estimada se for lembrado que a deformação total é constituída de duas parcelas, isto é, uma parcela elástica e uma parcela devido à fissuração que surge após a tensão nos pontos de Gauss atingir a resistência à tração uniaxial do concreto. Conhecido o grau do polinômio de interpolação do elemento finito usado na análise, sabe-se o campo de deformação ao longo do elemento. Admitindo um elemento finito com polinômio do primeiro grau, o campo de deformações no elemento é constante. Logo, a abertura de fissuras pode ser estimada pela multiplicação da deformação nos pontos de Gauss pela distância entre esses pontos. No caso de fissuras de cisalhamento, se as mesmas forem admitidas com inclinação de 45°, o que é razoável em vigas sem armadura transversal, pode-se tomar a distância na diagonal entre os pontos de Gauss (admitindo um elemento finito retangular). Esse procedimento pode ser extrapolado, e nesse caso toma-se a distância na diagonal entre os nós do elemento finito em questão.

**Figura 1 - Esquema do ensaio de cisalhamento direto em corpos-de-prova prismáticos (dimensões em mm)**

**Figura 2 - Aparato do ensaio de cisalhamento direto posicionado no equipamento de ensaio**



### 3. Materiais e programa experimental

#### 3.1 Materiais

Foi desenvolvida uma matriz de concreto com resistência à compressão de 50 MPa aos 28 dias. A composição final do traço é mostrada na Tabela 1. A essa matriz foram adicionados volumes variados de fibras de aço (1,0% e 2,0%, o que equivale a 79 kg/m<sup>3</sup> e 157 kg/m<sup>3</sup>, respectivamente) do tipo Dramix® RC 65/35 BN, com resistência à tração de 1150 MPa, formato retilíneo e gancho nas extremidades. Essas fibras possuíam comprimento

de 35 mm e relação de aspecto igual a 65. Também foram adicionadas 2,5%, em volume, de microfibras de Wollastonita às matrizes. Essas microfibras funcionam como um micro-reforço que é solicitado nas primeiras etapas de fissuração da matriz. O cimento utilizado era do tipo CP III 40 RS, o agregado miúdo era uma areia natural com dimensão máxima de 4,8 mm e o agregado graúdo possuía dimensão máxima de 12,5 mm. Todas as misturas foram realizadas em um misturador planetário e os corpos-de-prova armazenados em uma câmara úmida até o momento do ensaio.

Os traços de concreto com e sem adição de fibras foram caracterizados quanto à resistência à compressão ( $f_{cm}$ ), segundo a NBR 5739 [12], e resistência à tração por compressão diametral ( $f_{ctm,sp}$ ), segundo a NBR 7222 [13]. Esses ensaios foram realizados em corpos-de-prova cilíndricos com dimensões de 150 mm x 300 mm.

#### 3.2 Ensaio de cisalhamento direto

Os corpos-de-prova para o ensaio de cisalhamento direto tinham dimensões de 150 mm x 150 mm x 600 mm. O objetivo desse ensaio era determinar a relação tensão *versus* deslizamento dos compósitos reforçados com fibras de aço e, assim, verificar a influência das fibras na resistência e na ductilidade do concreto quando submetido a esforços de cisalhamento.

Na Tabela 2 são mostradas as nomenclaturas dos corpos-de-prova e o volume de fibras adicionadas. Foram moldados dois corpos-de-prova idênticos nos ensaios com concreto fibroso e quatro corpos-de-prova no ensaio com concreto sem fibras.

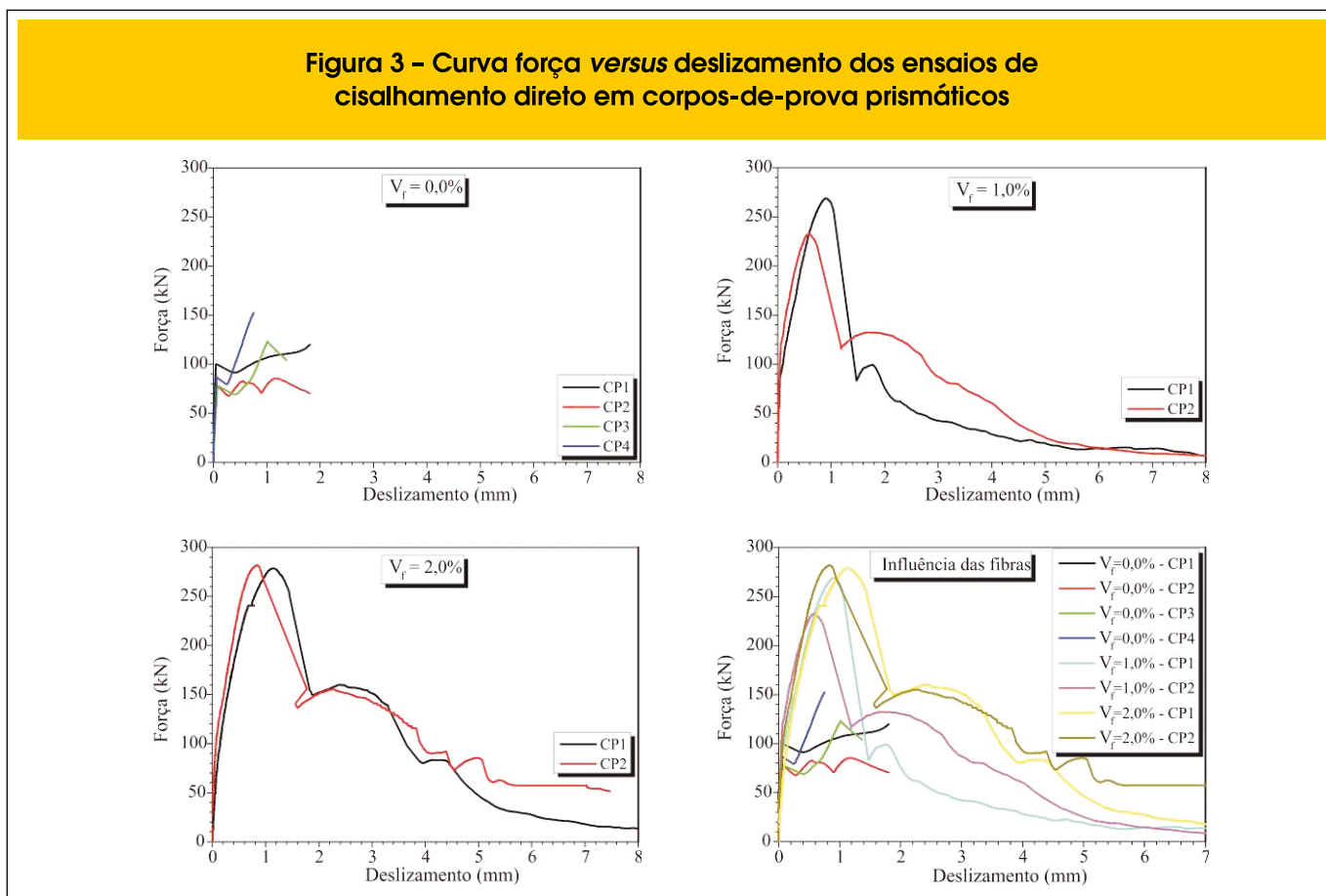
O esquema de ensaio foi baseado em trabalhos relatados na literatura [14]. Os corpos-de-prova foram entalhados em 15 mm ao longo do perímetro da seção transversal na região onde se esperava a ruptura por cisalhamento. Dessa forma, a seção resistente ao cisalhamento era de 120 mm x 120 mm (Figura 1).

Neste ensaio, a força de cisalhamento foi aplicada por um bloco metálico com dois cutelos rotulados, que possuíam 20 mm de espessura e 150 mm de comprimento, cujas faces externas eram separadas de 149 mm. O corpo-de-prova era apoiado em outro bloco metálico rígido com dois cutelos rotulados, que pos-

**Tabela 3 - Força máxima e tensão de cisalhamento máxima em um plano de cisalhamento**

Corpo-de-prova	n°. do CP	$V_f$ (%)	$f_{cm}$ (MPa)	$F_{max}$ (kN)	$\tau_u$ (MPa)	k
CP-60-0-12,5	1	0,0	51,77	119,93	8,13	1,13
	2			85,53	5,79	
	3			122,96	8,33	
	4			152,06	10,39	
CP-60-1-12,5	1	1,0	65,27	268,92	18,22	2,12
	2			232,58	16,02	
CP-60-2-12,5	1	2,0	71,30	278,76	18,73	2,25
	2			281,92	19,26	

**Figura 3 - Curva força versus deslizamento dos ensaios de cisalhamento direto em corpos-de-prova prismáticos**



suíam 20 mm de espessura e 150 mm de comprimento, com suas faces internas separadas de 159 mm.

O deslocamento vertical da região central entre os entalhes foi medido por meio de um transdutor de posição linear com curso máximo de 100 mm. Esse deslocamento representa o deslocamento médio dos dois planos de cisalhamento. (Figura 1). Os ensaios foram realizados, sob controle de deslocamento, em uma máquina universal de ensaios eletromecânica com capacidade de 1000 kN (Figura 2).

#### 4. Resultados

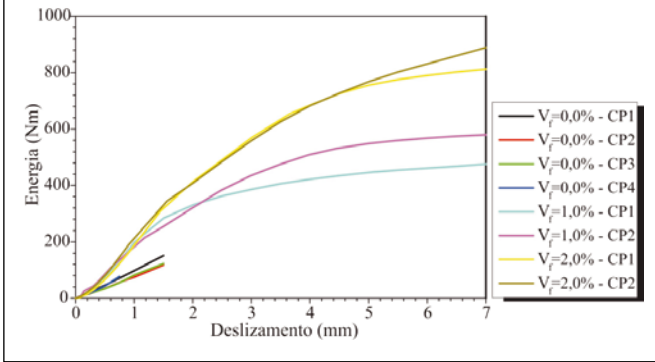
Na Tabela 3 são mostradas a força máxima ( $F_{max}$ ) e a tensão de cisalhamento máxima nos corpos-de-prova ensaiados. Esses valores encontram-se dividido por dois, ou seja, pelo número de planos de cisalhamento. Observa-se que, em média, a adição de 1,0% e 2,0% de fibras aumentou a tensão de cisalhamento,  $\tau_u$ , em aproximadamente 110% e 133%, respectivamente, com relação

**Tabela 4 - Parâmetros da curva tensão versus deformação à tração obtidos da modelagem computacional (15)**

Volume de fibras - $V_f$	$f_{cm}^{(a)}$ (MPa)	$f_{ct,num}$ (MPa)	$\epsilon_{1,num} = \frac{f_{ct,num}}{E_c}$ (‰)	$0,5f_{ct,num}$ (MPa)	$\epsilon_{2,num}$ (‰)	$\epsilon_{3,num}$ (‰)
0,0%	53,60	4,410				
1,0%	65,27	3,280	0,111	1,640	12,0	50,0
2,0%	51,67	4,810	0,123	2,405	11,0	100

<sup>(a)</sup> Resistência à compressão média obtida do ensaio.

**Figura 4 – Energia versus deslizamento do ensaio de cisalhamento direto em corpos-de-prova prismáticos**

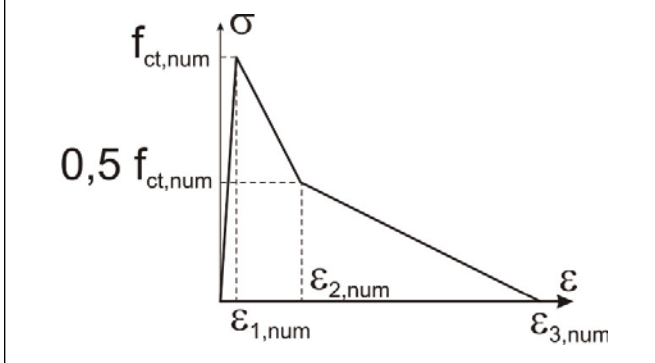


à matriz. Também é mostrada nessa tabela a constante de correlação  $k$  entre a tensão de cisalhamento média e a resistência à compressão média do concreto, dada por:

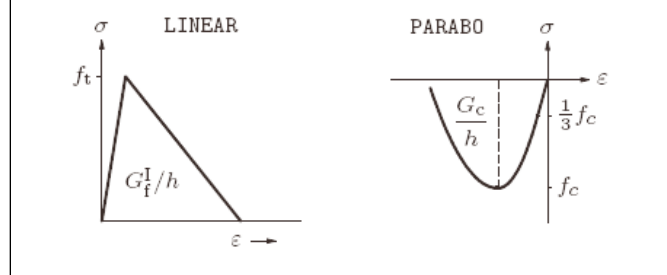
$$\tau_u = k \sqrt{f_{cm}} \tag{1}$$

Observa-se um incremento no valor da constante  $k$  com o aumento do volume de fibras e da resistência à compressão do concreto. Isso se deve tanto ao maior volume de fibras presente na mistura quanto à maior resistência a compressão do concreto fibroso. Da Figura 3 observa-se a influência das fibras no comportamento ao cisalhamento do concreto. Analisando a curva dos corpos-de-prova sem fibras, observa-se um primeiro pico de força referente à formação da fissura no plano de cisalhamento (ruptura da matriz) e um segundo pico de força referente à ruptura do corpo-de-prova. Este acréscimo de resistência mesmo após a formação da

**Figura 5 – Curva tensão versus deformação à tração típica do concreto reforçado com fibras**



**Figura 6 – Modelos pré-definidos do amolecimento do concreto na tração e na compressão (9)**



fissura de cisalhamento se deve ao efeito do engrenamento dos agregados fixados em cada face do plano de cisalhamento. O aumento de resistência pelo engrenamento dos agregados medido nos ensaios apresentou grande dispersão entre os quatro corpos-de-prova (20%, 10%, 58% e 74%).

A influência das fibras também pode ser observada dos resultados desse ensaio. Nos corpos-de-prova sem fibras, uma vez atingida a resistência ao cisalhamento, o corpo-de-prova foi à ruína sem apresentar resposta pós-pico. Com a adição de fibras, houve um sensível aumento da resistência ao cisalhamento do corpo-de-prova. Além disso, uma vez atingido o pico de força, houve uma queda da força aplicada, porém as fibras permitiram que parte dessa força ainda fosse transmitida pelo plano de cisalhamento, sendo gradualmente dissipada com o aumento do deslizamento. No caso do traço com 1,0% de fibras, a queda de resistência após o pico de força foi de cerca de 60%, enquanto no traço com 2,0% de fibras essa queda foi de cerca de 50%.

A partir das curvas mostradas na Figura 3, foi determinada a energia dissipada em cada ensaio para um determinado valor de deslizamento. Calculando essa energia para vários valores de deslizamento no plano de cisalhamento, foi possível traçar as curvas mostradas na Figura 4. Essas curvas representam a energia dissipada pelo plano de cisalhamento para cada valor específico de deslizamento. Quanto mais energia dissipada, maior a tenacidade do material. Dessa figura, observa-se que para um deslizamento fixo de 1,5 mm, a adição de 1,0% e 2,0% de fibras aumentou a energia com relação ao traço sem fibras em 106% e 151%, respectivamente. Após esse deslizamento, apenas os corpos-de-prova com fibras ainda suportaram carregamento. Para um deslizamento de 7 mm, o traço com 2,0% de fibras dissipou 61% mais energia que o traço com 1,0% de fibras.

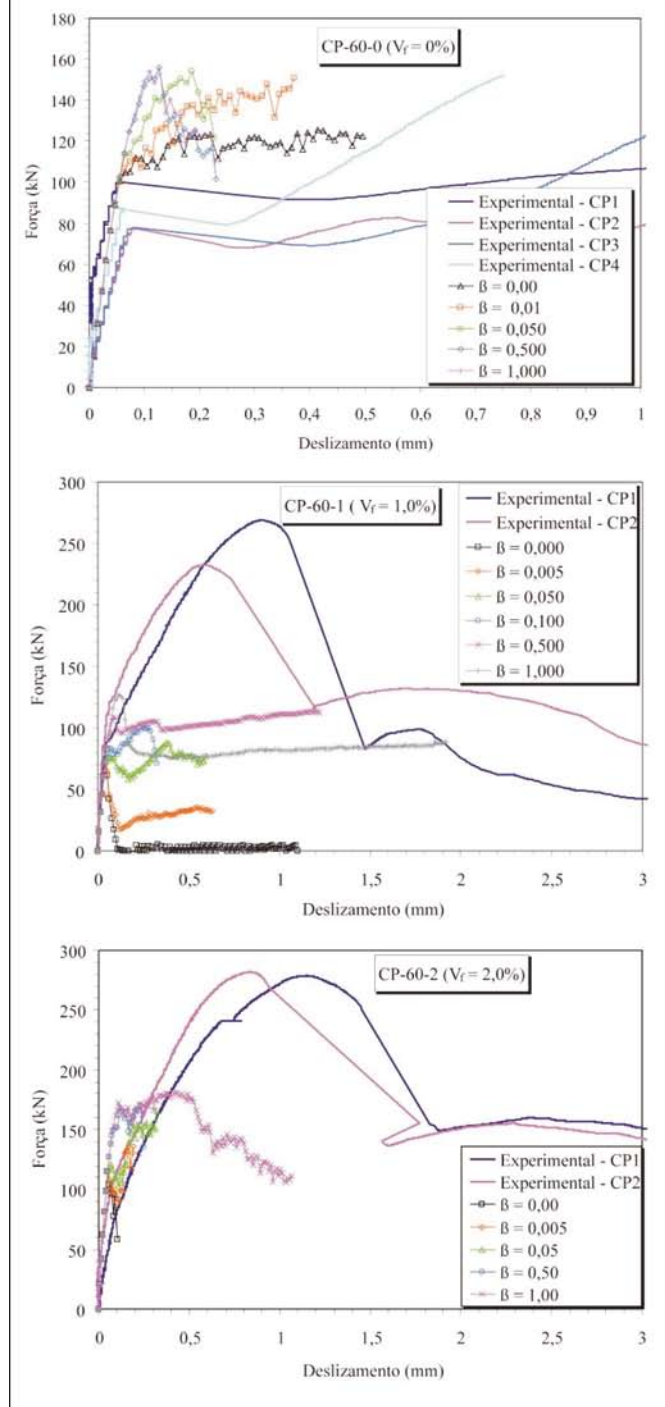
## 5. Modelagem computacional

### 5.1 Ensaios de cisalhamento direto

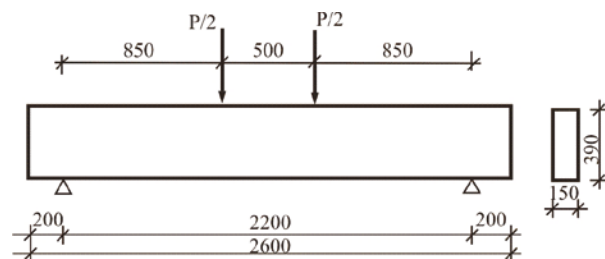
Inicialmente, os ensaios de cisalhamento direto descritos no item 3.2 foram modelados no programa comercial de elementos finitos DIANA® 8.1.2 com o objetivo de determinar o fator de retenção do cisalhamento ( $\beta$ ), tanto para o concreto sem fibras quanto para o concreto reforçado com fibras. Para tanto, foi empregada uma modelagem bidimensional admitindo fissuração distribuída e o

modelo incremental "Multi-Directional Crack Model" disponível no programa [10]. Vale ressaltar que os corpos-de-prova possuíam um plano de fraturamento definido, logo um modelo de fissura-

**Figura 7 – Curvas força versus deslizamento obtidas dos ensaios de cisalhamento direto e da modelagem computacional**



**Figura 8 – Dimensões e esquema de carregamento das vigas de concreto armado utilizadas na modelagem (dimensões em mm) (16)**



ção discreta poderia ser adequado. Apesar disso, optou-se pela modelagem com o modelo de fissuração distribuída devido à dificuldade em se modificar a malha quando se emprega um modelo de fissuração discreta para a modelagem de estruturas que não apresentam um plano de fraturamento definido.

Um dos parâmetros mais importantes para a modelagem é a curva tensão versus deformação à tração do concreto. Essa curva é de difícil obtenção a partir de ensaios experimentais, dessa forma ela foi obtida por análise inversa do ensaio de flexão em corpos-de-prova prismáticos sob quatro pontos de carga utilizando, também, o programa comercial DIANA® 8.1.2. A metodologia para a determinação dessa curva foi descrita pelos autores em trabalhos anteriores [15]. A partir da análise inversa, foi definida uma curva com ramo de amolecimento bilinear, a qual se mostrou mais adequada para a representação do concreto reforçado com fibras utilizado neste trabalho. Na Figura 5 é mostrado um esquema típico da curva tensão versus deformação à tração utilizada e na Tabela 4 são mostrados os parâmetros da curva para cada volume de fibras analisado.

Para representar o comportamento mecânico do concreto sem fibras, foi utilizado um modelo constitutivo com amolecimento linear para representar o concreto na tração e um modelo com amolecimento parabólico para representar o concreto na compressão, conforme mostrado na Figura 6. A energia de fratura na tração ( $G_f'$ ) foi obtida com as expressões do CEB-FIP Model Code 1990 [11] e a energia de fratura na compressão ( $G_c$ ) foi obtida a partir do diagrama Tensão versus Deformação também fornecido pelo CEB-FIP Model Code 1990 [10].

Foi realizado um estudo para verificar a influência do fator de retenção do cisalhamento ( $\beta$ ) na modelagem dos corpos-de-prova submetidos a cisalhamento direto. Neste caso, foram adotados os seguintes valores para esse fator: 0; 0,005; 0,010; 0,050; 0,100; 0,150; 0,200; 0,500; 1,000. Para essa análise, foram comparadas as curvas de força versus deslizamento dos ensaios de cisalhamento direto.

Na Figura 7 são mostradas as curvas experimentais e as obtidas da modelagem. Para os corpos-de-prova sem fibras, parece haver pouca influência do fator de retenção ao cisalhamento, sendo que a força última variou entre 100 kN e 160 kN quando o fator  $\beta$  variou de 0 a 1. Esta variação foi coerente com a observada para a força última nos ensaios de cisalhamento direto dos corpos-de-prova sem fibras. Dessa análise, optou-se pelo emprego do valor

Tabela 5 – Parâmetros usados na modelagem das vigas de concreto armado

Viga	Volume de fibras - $V_f$	$f_{cm}^{(a)}$ (MPa)	$f_{ct,num}$ (MPa)	$\varepsilon_{1,num} = \frac{f_{ct,num}}{E_c}$ (‰)	$0,5f_{ct,num}$ (MPa)	$\varepsilon_{2,num}$ (‰)	$\varepsilon_{3,num}$ (‰)
V-0-0,0	0,0%	46,30	3,92	Diagrama Linear ( $G_f = 0,121 \text{ N.mm/mm}^2$ )			
V-0-0,21	0,0%	47,23	3,36	Diagrama Linear ( $G_f = 0,121 \text{ N.mm/mm}^2$ )			
V-1-0,0	1,0%	56,87	3,28	0,103	1,640	12,0	50,0
V-1-0,21	1,0%	52,89	3,28	0,112	1,640	12,0	50,0
V-2-0,0	2,0%	51,67	4,81	0,123	2,405	11,0	100,0
V-2-0,21	2,0%	62,00	4,81	0,144	2,405	11,0	100,0

<sup>(a)</sup> Resistência à compressão média obtida do ensaio.

de 0,01 para o fator de retenção do cisalhamento, o qual forneceu uma força de 150 kN para o deslizamento último de 0,4 mm.

No caso dos corpos-de-prova de cisalhamento direto com fibras, os resultados da modelagem não conseguiram representar toda a curva experimental. Além disso, houve forte influência do valor do fator de retenção do cisalhamento na resposta pós-pico do modelo numérico. Isso pode ser explicado pela presença de outros mecanismos resistentes que atuam no modo II de fratura do concreto e que apresentaram maior contribuição na resistência desses corpos-de-prova devido à presença das fibras. O mais importante desses mecanismos é o efeito de ponte garantido pelas fibras ancoradas em lados opostos do plano de cisalhamento e que não pode ser representado em uma modelagem com fissuração distribuída que considere apenas o modo I de fratura. Dessa forma, optou-se por reavaliar o fator de retenção ao cisalhamento do concreto fibroso a partir da modelagem de vigas de concreto armado disponíveis na literatura.

## 5.2 Vigas de concreto armado

Uma vez modelados os corpos-de-prova de cisalhamento direto com e sem adição de fibras, foram modeladas seis vigas de concreto armado relatadas na literatura [16]. Na Figura 8 é mostrado um detalhe típico dessas vigas e o seu esquema de carregamento de modo a provocar uma ruptura por cisalhamento vertical. Nessa referência, foram ensaiadas seis vigas, sendo duas de concreto simples e quatro em concreto reforçado com fibras. Das vigas de concreto simples, uma não possuía armadura transversal (V-0-0,0) e a outra possuía uma taxa de armadura transversal igual a 0,21% (V-0-0,21). As vigas de concreto com fibras foram reforçadas com volumes diferentes de fibras (1% e 2%). Foram ensaiadas duas vigas com 1% de fibras, sendo uma sem armadura transversal (V-1-0,0) e outra com 0,21% de armadura transversal (V-1-0,21). Do mesmo modo, foram ensaiadas duas vigas com 2% de fibras, sendo uma sem armadura transversal (V-2-0,0) e outra com 0,21% de armadura transversal (V-2-0,21).

Para a modelagem das vigas, foi utilizado um elemento finito sólido isoparamétrico de 8 nós (Elemento HX24L) que permite aproxi-

mação linear para análise de deslocamentos e constante para tensões e deformações na direção normal. O esquema de integração numérica adotada nesse elemento é o da quadratura de Gauss. Esse elemento possui três graus de liberdade (translações) por nó [10].

A representação das armaduras longitudinal e transversal foi realizada usando o elemento “*embedded reinforcement*”. Este elemento é disposto no interior da viga e não é considerado o escorregamento entre a armadura e o concreto. Deste modo, é garantida a compatibilidade de deslocamentos dos nós, resultando num modelo com aderência perfeita entre a armadura e o concreto.

O modelo constitutivo utilizado para representar o concreto foi do tipo “*Total Strain*” com fissuras fixas (*Fixed crack*). Na tração, foi utilizado um modelo constitutivo com amolecimento linear para representar o concreto sem fibras e um modelo com amolecimento bilinear para representar o concreto reforçado com fibras. Na compressão, foi utilizado um modelo com amolecimento parabólico. Nesse modelo, os parâmetros de entrada são, além das resistências à tração e à compressão do material, a energia de fratura na tração ( $G_f$ ), a energia de fratura na compressão ( $G_c$ ) e o fator de retenção do cisalhamento ( $\beta$ ), o qual é admitido constante durante o incremento de deslocamento na estrutura. A energia de fratura na compressão foi obtida através do diagrama tensão *versus* deformação fornecido pelo CEB-FIP Model Code 1990 [11]. No caso das vigas de concreto reforçado com fibras, no lugar da energia de fratura na tração é fornecida a curva tensão *versus* deformação à tração do material. Os parâmetros de entrada para a modelagem das seis vigas de concreto armado são mostrados na Tabela 5.

Na Figura 9 são mostradas as curvas obtidas da modelagem computacional das vigas de concreto armado. Nessa mesma figura, também são mostradas as curvas obtidas experimentalmente. Observa-se que o valor do fator de retenção ao cisalhamento ( $\beta$ ) influenciou a resposta das vigas sem fibras. Nesse caso, houve um aumento da rigidez e da resistência última da viga com o aumento do valor do fator  $\beta$ . A melhor aproximação entre as curvas numérica e experimental se deu para o valor de  $\beta$  igual a 0,01,

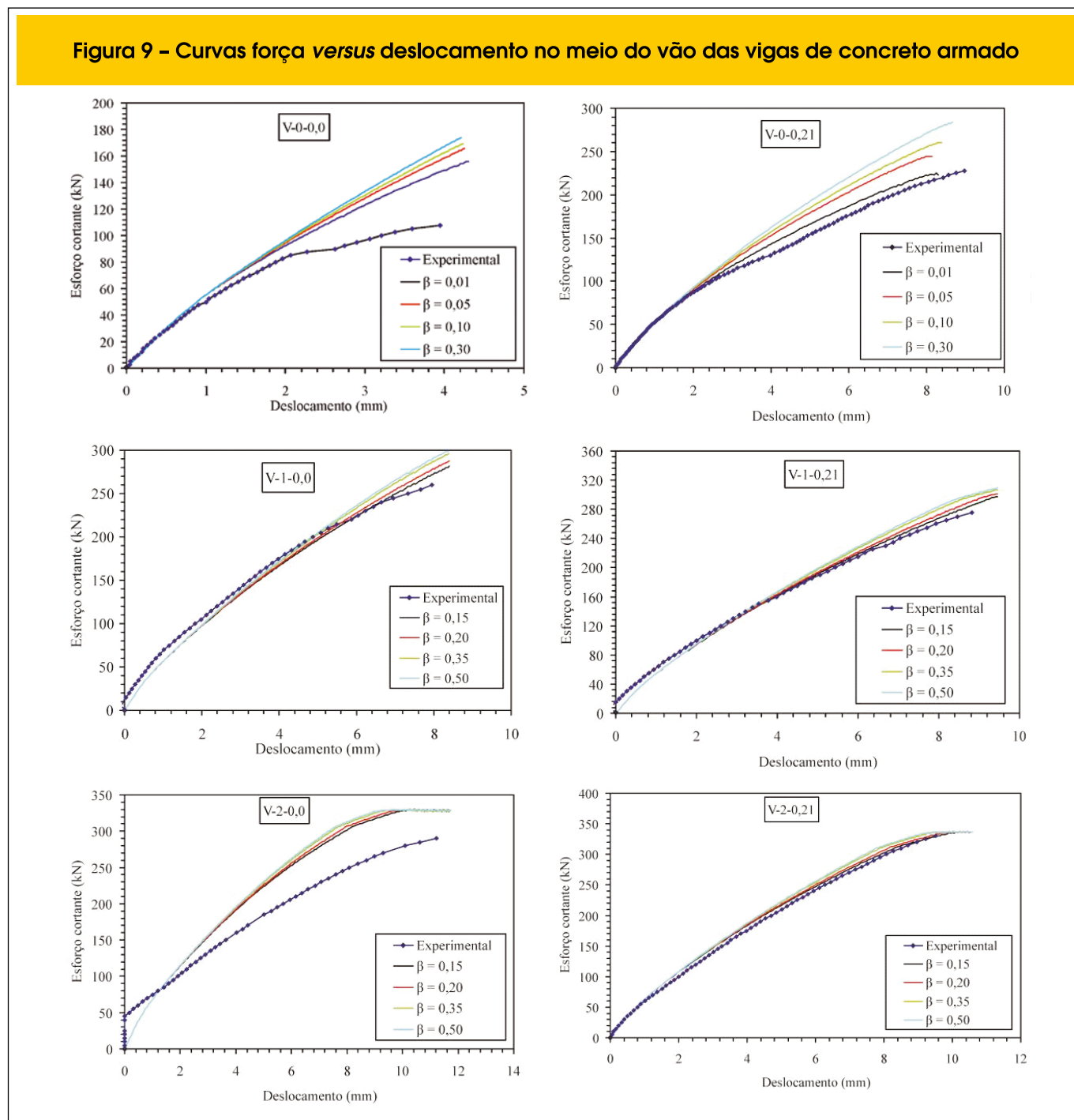


confirmando a análise realizada nos corpos-de-prova de cisalhamento direto. Vale ressaltar a maior diferença observada entre as curvas no caso da viga sem fibras e sem estribos (V-0-0). Nessa viga, a ruína se deu pela formação de uma única fissura diagonal ligando o apoio ao ponto de aplicação do carregamento sem que houvesse uma maior fissuração da viga (Figura 10). Isso justifica a maior rigidez obtida da modelagem com fissuração distribuída.

Analisando as vigas reforçadas com fibras, nota-se que houve pouca influência do fator de retenção ao cisalhamento ( $\beta$ ), tan-

to nas vigas com estribos quanto nas vigas sem estribos. Isso mostra que o aumento significativo do trecho pós-pico do diagrama tensão *versus* deformação à tração proporcionado pelas fibras minimizou a influência do fator de retenção ao cisalhamento na resposta da estrutura. Neste caso, a melhor aproximação entre as curvas numérica e experimental se deu para o valor de  $\beta$  igual a 0,15. Ressalta-se que a maior diferença observada entre as curvas no caso da viga com 2% de fibras e sem estribos (V-2-0) deve-se a problemas observados no ensaio dessa viga, como relatado na referência [16].

Figura 9 – Curvas força *versus* deslocamento no meio do vão das vigas de concreto armado



**Tabela 6 – Esforço cortante último das vigas de concreto armado**

Viga	$V_{u,exp}^{(a)}$ (kN)	$V_{u,num}^{(b)}$ (kN)	$V_{u,num}/V_{u,exp}$
V-0-0,0	172,5	156,0	0,90
V-0-0,21	228,5	225,0	0,98
V-1-0,0	260,0	281,5	1,08
V-1-0,21	275,5	297,6	1,08
V-2-0,0	290,5	329,6	1,13
V-2-0,21	360,0	337,2	0,94

<sup>(a)</sup>  $V_{u,exp}$ : esforço cortante último obtido experimentalmente;  
<sup>(b)</sup>  $V_{u,num}$ : esforço cortante último obtido da modelagem.

Na Figura 11 são mostradas as curvas de deformação da armadura longitudinal no meio do vão obtidas da modelagem. Nessa

mesma figura, também são mostradas as curvas obtidas experimentalmente. Novamente, observa-se uma maior influência do fator de retenção do cisalhamento nas vigas sem fibras e uma redução da sua influência nas vigas reforçadas com fibras. Neste caso, porém, observa-se, em todas as vigas, que a rigidez da resposta numérica foi ligeiramente maior que a observada nas curvas experimentais. Isso se deve, provavelmente, à consideração de aderência perfeita entre a armadura longitudinal e o concreto, o que tende a enrijecer a estrutura pela não consideração do deslizamento que ocorre entre a armadura e o concreto.

Na Figura 12 são mostradas as curvas de deformação obtidas da modelagem para o estribo mais solicitado, isto é, que intercepta a fissura diagonal com maior abertura. Nessa mesma figura, também são mostradas as curvas obtidas experimentalmente. Observa-se, neste caso, que a resposta numérica foi muito mais rígida que a resposta experimental. Isso ocorre pelo fato de em todas as vigas ensaiadas ter surgido uma fissura diagonal principal que concentrou tensão no estribo, fato que não foi possível de representar com um modelo de fissuração distribuída. Apesar disso, ainda se optou pelo emprego da modelagem com fissuração distribuída pelo fato da dificuldade de se definir de antemão o caminhamento da fissura principal em um modelo com fissuração discreta.

**Tabela 7 – Abertura de fissuras nas vigas de concreto armado, em mm, avaliada pelas coordenadas nodais do elemento finito**

Viga	F1 = 40%		F2 = 60%		F3 = 100%	
	Exp.	Num.	Exp.	Num.	Exp.	Num.
V-0-0,0	0,00 (70)	0,000 (69)	1,00 (100)	0,011 (102)	2,40 (170)	0,189 (170)
V-0-0,21	0,03 (100)	0,007 (106)	0,20 (160)	0,128 (157)	0,53 (230)	0,715 (262)
V-1-0,0	0,05 (110)	0,028 (114)	0,10 (170)	0,164 (170)	0,73 (260)	0,486 (283)
V-1-0,21	0,00 (120)	0,037 (121)	0,20 (180)	0,195 (181)	0,60 (280)	0,525 (299)
V-2-0,0	0,02 (130)	0,007 (134)	0,10 (190)	0,096 (194)	0,45 (290)	0,451 (328)
V-2-0,21	0,02 (130)	0,002 (134)	0,10 (200)	0,111 (201)	0,30 (360)	0,491 (337)

**Figura 10 – Ruptura das vigas ensaiadas (16)**



(a) V-0-0



(b) V-0-0,21

Na Tabela 6 são mostrados os valores últimos do esforço cortante nas vigas obtidos experimentalmente e da modelagem computacional. Neste caso, foram utilizados para o fator de retenção do cisalhamento os valores de 0,01 e 0,15 referentes ao concreto sem fibras e com fibras, respectivamente. Vale ressaltar que o valor do esforço cortante último da viga V-0-0 nessa tabela é maior que o valor indicado na Figura 9. Isso aconteceu porque os transdutores de deslocamento que mediam o deslocamento vertical da viga foram retirados antes do final do ensaio [16]. Observa-se que

a relação entre o esforço cortante último numérico e o esforço cortante experimental apresentou um valor médio de 1,021 com um desvio padrão de 0,092. Isso demonstra que a modelagem computacional aqui realizada foi capaz de representar com boa precisão a ruína dessas vigas.

Na seqüência, foram determinadas as aberturas de fissuras a partir da modelagem computacional e seus valores foram comparados aos obtidos experimentalmente. Na tabela 7 são apresentados os valores obtidos para as aberturas de fissuras, em milímetros. Os

**Figura 11 - Curvas força *versus* deformação na armadura longitudinal no meio do vão das vigas de concreto armado**

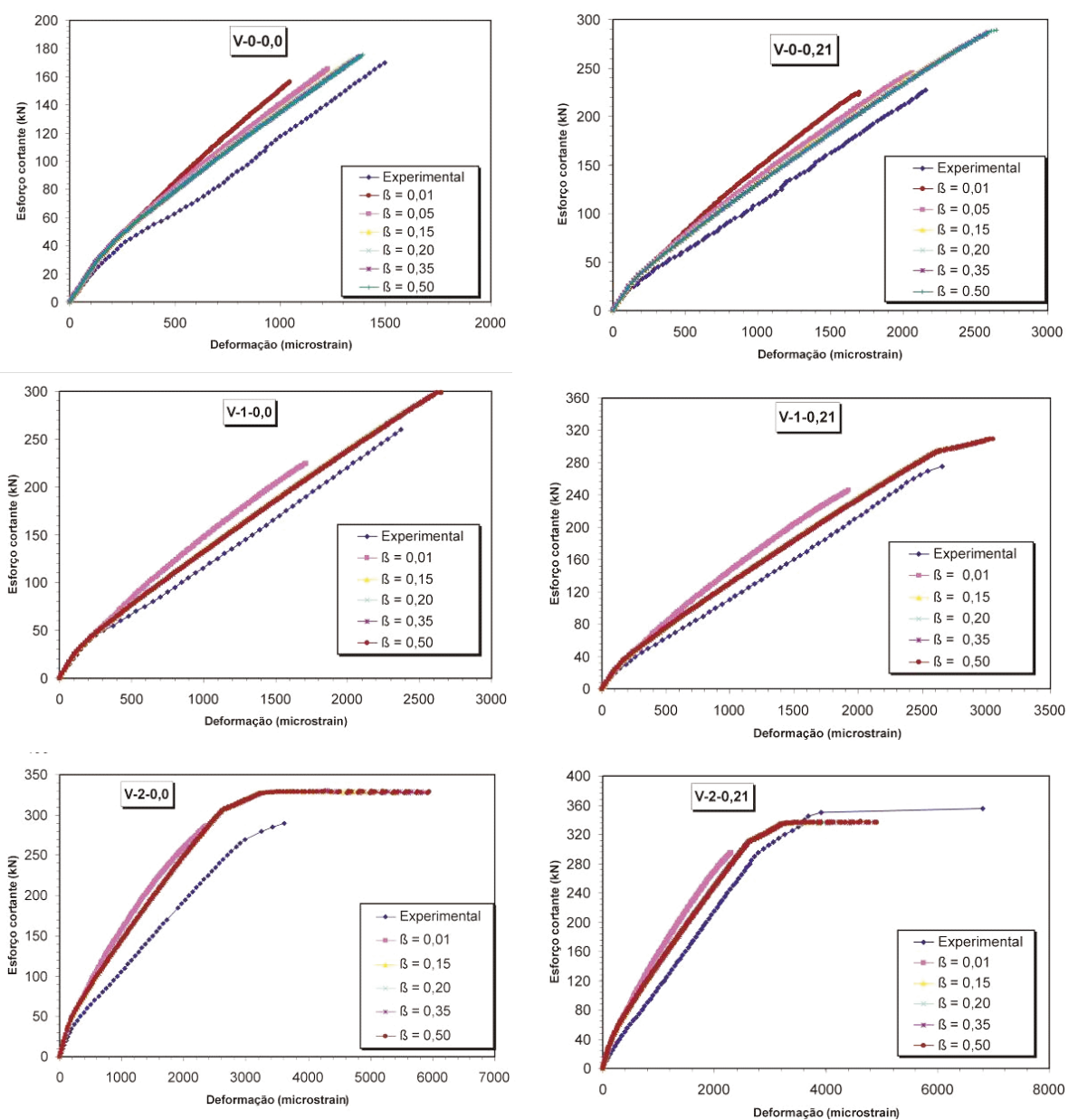


Figura 12 – Curvas força versus deformação no estribo das vigas de concreto armado

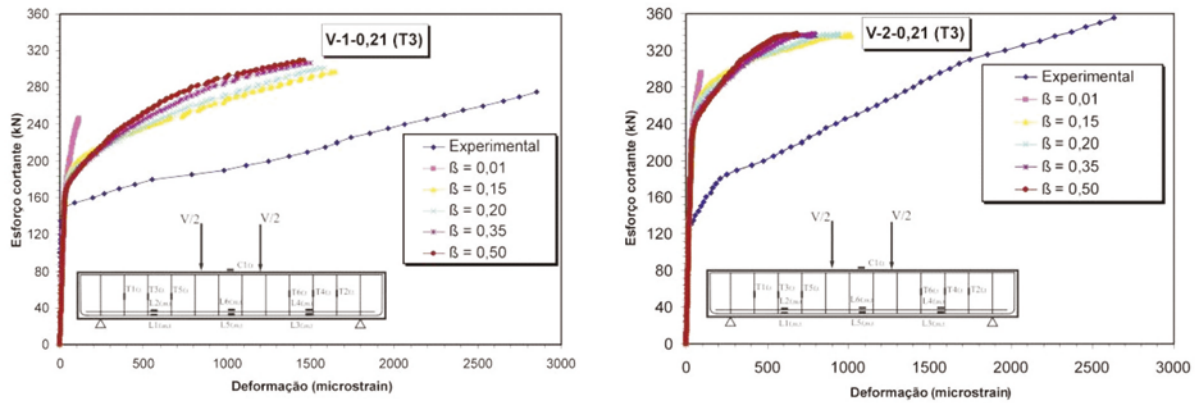
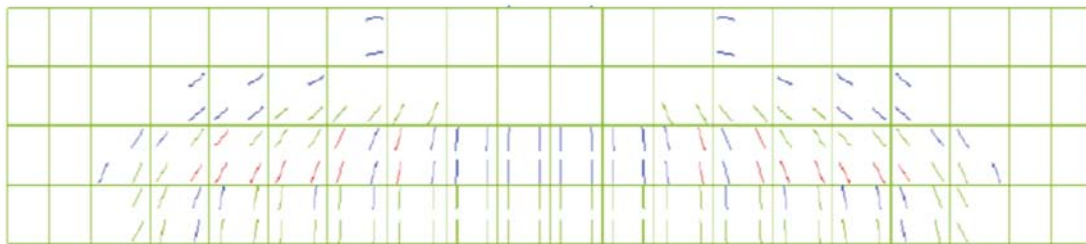
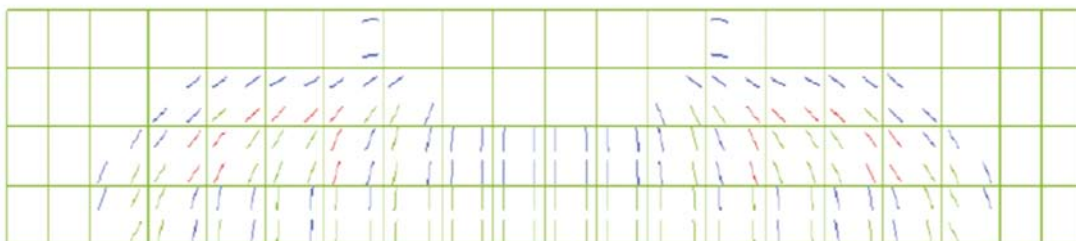


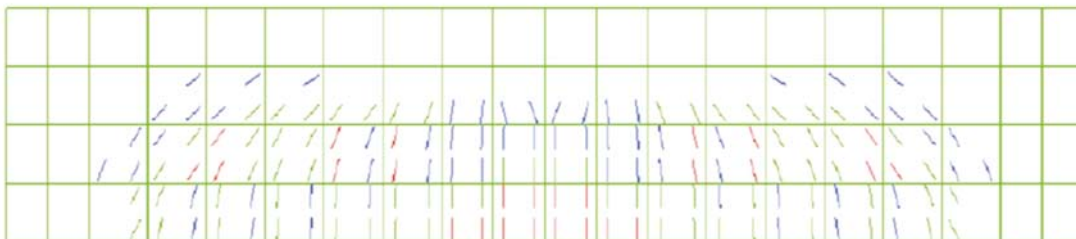
Figura 13 – Panorama de fissuração das vigas de concreto armado



(a) Viga V-0-0,21 – F = 262,44 kN



(b) Viga V-1-0,21 – F = 298,66 kN



(c) Viga V-2-0,21 – F = 336,56 kN

valores entre parênteses indicam o valor da força, em kN, no momento em que a fissura foi determinada, tanto no ensaio quanto na modelagem numérica. As fissuras foram determinadas para três níveis de carregamento, isto 40%, 60% e 100% da força última em cada viga, aproximadamente. Nessa tabela, as aberturas foram calculadas usando a distância da diagonal entre os nós do elemento da malha escolhido para análise. Essa escolha foi realizada a partir da observação do elemento finito que apresentava a maior abertura de fissura de cisalhamento. O valor experimental dessa tabela foi obtido diretamente da referência [16]. Nesse caso, tomou-se a leitura do transdutor o mais próximo possível da posição do elemento finito da malha escolhido para análise.

Observa-se dessa tabela que, de forma geral, as aberturas de fissuras determinadas numericamente se aproximaram bem dos valores medidos nos ensaios em todos os níveis de carregamento. Exceção se faz à viga V-0-0, sem fibras e sem estribos, onde as aberturas avaliadas numericamente ficaram sensivelmente abaixo dos valores experimentais. Isso se deve à forma de ruptura dessa viga, que se deu pela formação de uma única fissura diagonal ligando o apoio ao ponto de aplicação do carregamento sem que houvesse uma maior fissuração da viga. Dessa forma, nitidamente, um modelo de fissuração distribuída não se mostra adequado para avaliar a forma de fissuração de uma viga de concreto simples e sem estribo.

Essa metodologia para avaliar a abertura de fissuras foi inicialmente aplicada pelos autores em vigas de concreto armado, sem fibras e com estribos, submetidas a cisalhamento, e também mostrou boa aproximação com os resultados experimentais [17]. Apesar de ser esta uma metodologia bastante simples, ela se mostra interessante em estruturas em três dimensões. Nesse tipo de estrutura, tais como pilares de vertedouro e caixas espirais de Usinas Hidroelétricas, não se aplicam as simplificações presentes nos modelos normalizados para avaliação da abertura de fissuras em estruturas de concreto armado.

Na Figura 13 é apresentado o panorama de fissuração, próximo à ruína, das vigas reforçadas com estribos que foram modeladas. As linhas em vermelho indicam a posição das fissuras de maior abertura. Observa-se que a ruptura das vigas sem fibras e com 1% de fibras (V-0-0,21 e V-1-0,21) se deu por cisalhamento, como observado nos ensaios. Já a viga com 2% de fibras (V-2-0,21) apresentou pronunciadas fissuras de cisalhamento e de flexão no meio do vão, confirmando a observação experimental, uma vez que essa viga rompeu por flexão e não por cisalhamento.

## 6. Conclusões

Este artigo tratou da modelagem computacional de vigas de concreto armado reforçado com fibras submetidas a esforços de cisalhamento por meio da utilização do programa comercial em elementos finitos DIANA® 8.1.2. As principais conclusões obtidas foram:

- Dos ensaios de cisalhamento direto, observou-se grande contribuição das fibras de aço no aumento da resistência do concreto aos esforços de cisalhamento. A adição de 1% de fibras proporcionou um aumento de 87% na tensão última de cisalhamento do concreto, enquanto a adição de 2% de fibras proporcionou um aumento de 99% nessa mesma tensão. Além disso, as fibras proporcionaram um comportamento pós-pico estável aos corpos-de-prova, permitindo uma maior dissipação de energia.

- Da modelagem do ensaio de cisalhamento direto, foi possível identificar que um valor de 0,01 era adequado para o fator de retenção do cisalhamento ( $\beta$ ) do concreto sem fibras. Esse valor foi confirmado a partir da modelagem de vigas de concreto armado. Já no caso dos corpos-de-prova com fibras, a modelagem computacional não conseguiu representar toda a curva tensão *versus* deslizamento obtida do ensaio, uma vez que o mecanismo resistente proporcionado pelas fibras atravessando o plano de cisalhamento não foi representado na modelagem.
- Da modelagem das vigas de concreto armado sem fibras, constatou-se a influência do valor do fator de retenção do cisalhamento ( $\beta$ ) na resistência da viga. De forma geral, sugere-se o emprego de um valor em torno de 0,01 para esse fator, uma vez que se observa pequena contribuição dos esforços de cisalhamento transferidos pelas fissuras na resistência final da viga.
- Da modelagem das vigas de concreto armado com fibras, constatou-se pequena influência do valor do fator de retenção do cisalhamento ( $\beta$ ) na resistência da viga. De forma geral, sugere-se o emprego de um valor em torno de 0,15 para esse fator. Empregando esse valor na modelagem das vigas, observou-se boa correlação entre as forças última numérica e experimental, sendo que a razão entre essas forças apresentou um valor médio de 1,021 e desvio padrão de 0,092.
- A deformação da armadura longitudinal das vigas foi bem representada pela modelagem, apesar da maior rigidez devido à consideração de aderência perfeita entre a armadura e o concreto. Por outro lado, a deformação nos estribos obtida da modelagem foi muito menor que a observada nos ensaios devido à forma de ruína das vigas, isto é, com a formação de uma fissura diagonal principal. Esse tipo de ruína não pôde ser representado com um modelo de fissuração distribuída.
- Ainda da modelagem das vigas, observou-se uma forte redução da abertura de fissuras devido à adição de fibras de aço.
- A metodologia proposta para avaliação da abertura de fissuras, empregando uma modelagem baseada em uma fissuração distribuída, mostrou-se adequada quando se compararam as aberturas obtidas da modelagem com as medidas no ensaio. Isso é particularmente interessante se for levado em consideração que não há uma expressão normalizada para o cálculo da abertura de fissuras de cisalhamento, diferentemente do que ocorre com as fissuras de flexão. Dessa forma, essa metodologia de modelagem pode ser útil no projeto de estruturas, principalmente naquelas onde os esforços de cisalhamento são preponderantes bem como nas estruturas que se distanciam do comportamento de elementos lineares, tais como as estruturas de barragens.

## 7. Agradecimentos

Este trabalho faz parte de uma pesquisa financiada pela Agência Nacional de Energia Elétrica – ANEEL – que é um órgão regulador do sistema elétrico brasileiro. Os autores são gratos a essa agên-

cia pelo suporte financeiro bem como à empresa Furnas Centrais Elétricas S.A. que disponibilizou seus laboratórios e pessoal técnico para a realização dos ensaios experimentais. Os autores também agradecem ao Prof. Leandro Vanalli que contribuiu com essa pesquisa durante o seu período como bolsista de Desenvolvimento Científico Regional na UFG.

## 8. Referências bibliográficas

- [01] Vecchio, F.J.; Collins, M.P. The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Journal*, n. 83, 1986, p.219-231.
- [02] Pang, X. B.; Hsu, T. T. C. Behavior of reinforced concrete membrane elements in shear. *Structural Journal of the American Concrete Institute*, v.92, n.6, 1995, p.665-679.
- [03] Hsu, T.T.C. Unified approach to shear analysis and design. *Cement and concrete Research*, n. 20, 1998, p.419-435.
- [04] Carmo, L.C. Ductilidade de vigas de concreto armado convencional e de alta resistência reforçadas com fibras metálicas: Análise via Método dos Elementos Finitos. 2005. 188 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia.
- [05] Gálvez J. C.; Cervenka J.; Cendón D. A.; Saouma V. A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete strategy for problems in elasticity, plasticity, linear and nonlinear fracture mechanics. Technical Report, Department of Civil Engineering, University of Colorado, Boulder, and Electric Power Research Institute, Palo Alto, CA, 2002.
- [06] Hillerborg, A.; Modéer, M.; Petersson, P. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and concrete Research*, n. 6, 1976, p.773–782.
- [07] Reich, R., Cervenka, J., and Saouma, V.. Merlin: A three-dimensional finite element program based on a mixed-iterative solution strategy for problems in elasticity, plasticity, and linear and nonlinear fracture mechanics. Technical report, Electric Power Research Institute, Palo Alto, California, 1997.
- [08] Cervenka, V. Inelastic finite element analysis of reinforced concrete panels under in-plane loads. PhD thesis, University of Colorado, USA, 1970.
- [09] Souza, R. A. Concreto estrutural: Análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades. 2004. 442f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [10] TNO Building and Construction Research. DIANA User's Manual – Release 8.1. Delft, Netherlands, 2001.
- [11] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. London: Thomas Telford Services Ltd, 1993.
- [12] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Concreto – Ensaio de compressão de corpos-de-prova cilíndricos. NBR 5739. Rio de Janeiro, 1994.
- [13] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Argamassa e concreto – Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos-de-prova cilíndricos. NBR 7222. Rio de Janeiro, 1994.
- [14] Mirsayah, A.A.; Banthia, N. Shear strength of steel fiber-reinforced concrete. *ACI Materials Journal*, v. 99, n. 5, 2002, p. 473-479.
- [15] Araújo, D.L.; Carmo, L.C.; Prado, A.A. Determinação da curva tensão-deformação à tração de concretos reforçados com fibras de aço via modelagem computacional. *In: CMNE 2007 Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia / XXVIII CILAMCE Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia*, 2007, Porto. Métodos Numéricos e Computacionais em Engenharia - CMNE/CILAMCE. Porto, 2007. p. 1-16.
- [16] Nunes, F. G. T. Análise experimental de vigas de concreto reforçado com fibras de aço submetidas a esforços de cisalhamento. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia.
- [17] Carmo, L.C.; Vanalli, L.; Araújo, D.L. Modelagem numérica de vigas de concreto armado submetidas a cisalhamento. *In: XXVII CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2006, Belém. Proceedings, 2006. p. 1-14.