

Shear strength mechanisms in reinforced concrete structures: a one-dimensional finite element approach

Mecanismos de resistência ao cisalhamento em estruturas de concreto armado: uma abordagem via método dos elementos finitos unidimensionais



C. G. NOGUEIRA^a
gorlanog@sc.usp.br

H. B. CODA^b
hbcoda@sc.usp.br

W. S. VENTURINI^c
venturin@sc.usp.br

Abstract

This paper shows the development of a mechanical model to reinforced concrete analysis based on the finite element method, taking into account the non-linear material behavior with shear strength mechanisms, such as shear reinforcement and dowel action. These mechanisms are coupled to a damage model for concrete to better represent the material stiffness loss, as well as the global response of beams. Numerical examples are presented to validate the model, verifying the importance of these contributions, mainly for hyperstatic beams with high span-to-depth ratio.

Keywords: Finite element method, damage, complementary mechanisms, shear strength, beams.

Resumo

Este trabalho apresenta um modelo mecânico para análise de vigas em concreto armado com base no método dos elementos finitos, considerando a não-linearidade física dos materiais em conjunto com mecanismos específicos de resistência ao cisalhamento do concreto armado, tais como a armadura transversal e o efeito de pino. Esses mecanismos são acoplados a um modelo de dano para o concreto com o objetivo de representar melhor as perdas de rigidez do material, bem como a resposta global das vigas. Foram apresentados exemplos numéricos para validação do modelo, verificando-se a importância dessas contribuições, principalmente em vigas hiperestáticas com elevada relação altura/comprimento.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos, dano, mecanismos complementares, resistência ao cisalhamento, vigas.

^a Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, Pós-doutorando, gorlanog@sc.usp.br, Av. Trabalhador São-carlense 400, CEP 13560-000, São Carlos-SP, Brasil;

^b Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, Professor associado, hbcoda@sc.usp.br, Av. Trabalhador São-carlense 400, CEP 13560-000, São Carlos-SP, Brasil;

^c Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, Professor titular, venturin@sc.usp.br, Av. Trabalhador São-carlense 400, CEP 13560-000, São Carlos-SP, Brasil.

1. Introdução

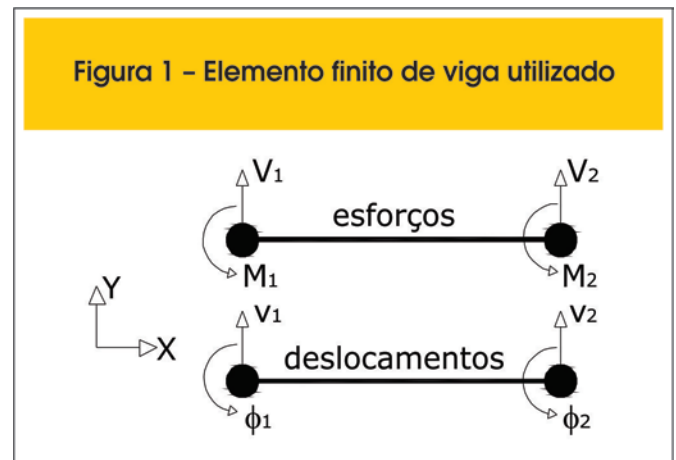
Embora a modelagem de estruturas de concreto armado encontre-se hoje bastante desenvolvida, ainda não existe um modelo matemático completo que seja capaz de descrever com grande precisão o comportamento do concreto armado e seus diversos mecanismos de transferência de tensões. Seu comportamento não-linear é função direta da fissuração do concreto e da plastificação do aço, que, por sua vez, são responsáveis pelo surgimento de outros fenômenos como: enrijecimento do concreto à tração entre fissuras, engrenamento dos agregados, efeito de pino da armadura e perda de aderência entre o aço e o concreto adjacente. Na literatura, existem diversos estudos científicos que procuram identificar e quantificar esses fenômenos como os trabalhos de Krefeld e Thurston [1], Dei Poli et al. [2], Gergely [3], Dulacska [4], Jimenez et al. [5], Walraven [6], Laible et al. [7], Bazant e Gambarova [8] e Millard e Johnson [9]. Em especial, os mecanismos de resistência ao cisalhamento são os principais alvos deste trabalho. A base para o estudo desses mecanismos é a analogia de treliça de Ritter-Mörsch. As bielas de compressão que se desenvolvem ao longo do plano inclinado de fissuração fornecem uma parcela de resistência do concreto ao cisalhamento, ao passo que os montantes verticais representam a contribuição da armadura transversal. A parcela do concreto contempla os chamados mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento, definidos pelo engrenamento de agregados e efeito de pino. As normas de projeto atuais fornecem expressões para o cálculo da parcela do concreto em função basicamente de sua resistência à compressão e das dimensões do elemento estrutural, porém nada que seja específico de cada um dos mecanismos. Já a armadura transversal é calculada de modo a absorver o excesso de força cortante não resistida pelo concreto. O grande desafio é representar de maneira adequada como ocorrem essas transferências de tensões pelos agregados, pela armadura longitudinal que funciona como pino e do concreto fissurado para a armadura transversal, para que seja possível incorporar esses efeitos em modelagens numéricas (Martín-Perez e Pantazopoulou [10], He e Kwan [11], El-Ariss [12], Sanches Jr e Venturini [13], Oliver et al. [14]). Diante disso, este trabalho tem como objetivo a apresentação de um modelo mecânico para análise de estruturas em concreto armado levando em consideração, além do comportamento não-linear dos materiais aço e concreto, mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento. Para isso, são incorporados a um modelo de elementos finitos de vigas as parcelas de resistência da armadura transversal e do efeito de pino através de modelos aproximados. Como o comportamento da armadura transversal e do efeito de pino está diretamente associado à intensidade da fissuração/degradação do concreto, esses efeitos foram acoplados ao modelo de dano. Assim, acredita-se que o modelo mecânico desenvolvido seja interessante do ponto de vista de modelagem numérica por considerar todos esses efeitos, bem como do ponto de vista de eficiência de processamento, pois se trata de um elemento finito unidimensional.

2. Modelo mecânico proposto

2.1 MEF unidimensional com teoria de Timoshenko

A hipótese de Euler-Bernoulli para flexão de vigas considera que as deformações causadas por tensões de cisalhamento são nulas em toda a seção transversal. Tal consideração pode ser adotada em vi-

Figura 1 – Elemento finito de viga utilizado



gas cujo comprimento é bem superior à sua altura. No entanto, em vigas curtas o efeito das deformações por cisalhamento, dado pela teoria de Timoshenko, não pode ser desprezado. A hipótese fundamental da teoria de Timoshenko considera que as seções planas permanecem planas após a deformação, porém não mais ortogonais ao eixo do elemento, o que confere melhor representação do problema. Essa consideração provoca um acréscimo na curvatura das seções, somando sua parcela de energia à energia interna de flexão pura. Com isso, a rigidez da peça sofre uma redução, provocando um aumento dos deslocamentos. Diversos autores propuseram elementos finitos que incorporam as hipóteses de Timoshenko, tais como Nickel e Secor [15], Prathap e Bhashyam [16] e Heyliger e Reddy [17]. As formulações diferem entre si apenas na escolha da função interpoladora para aproximar o campo de deslocamentos transversais e as rotações. Para este trabalho, as funções escolhidas são polinômios de terceiro e segundo graus para os deslocamentos transversais e as rotações decorrentes da flexão, respectivamente. Os parâmetros nodais são os deslocamentos totais (v_1 e v_2) correspondente às contribuições do momento fletor e da força cortante, bem como as rotações provocadas somente pela parcela do momento fletor (ϕ_1 e ϕ_2), pois ambas as grandezas são contínuas em todo o comprimento do elemento. As distorções são calculadas posteriormente e somadas às rotações de flexão constituindo a rotação total das extremidades dos elementos finitos. A figura 1 ilustra o elemento finito de viga unidimensional utilizado. Com isso, a matriz de rigidez do elemento finito de viga de Timoshenko, definida a partir da minimização do funcional de energia potencial total é dada pela equação (1):

$$[K] = \frac{EI}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(2+g) & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(2-g) \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(2-g) & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(2+g) \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde: L é o comprimento do elemento finito; g é a constante de Weaver que considera a influência das deformações de cisalhamento dada por $\frac{6E}{kGAL^2}$; E e G são, respectivamente, o mó-

dulo de elasticidade longitudinal e transversal do concreto; I é o momento de inércia da seção transversal; A é a área da seção transversal; k é o fator de forma da seção transversal, que para seções retangulares é igual a 0,8333.

2.2 Não-linearidade física para o concreto

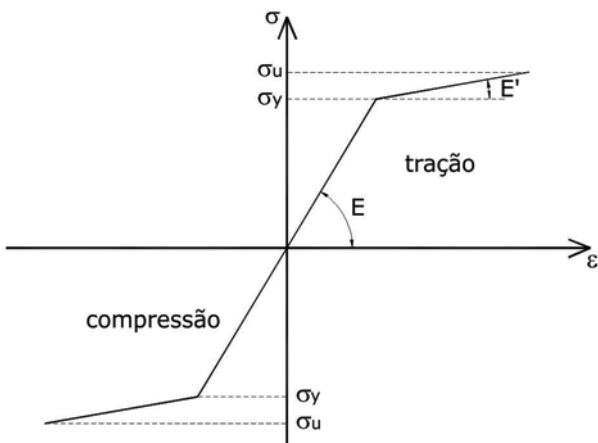
Do ponto de vista mecânico, a fissuração degrada a rigidez do material refletindo diretamente em sua resposta estrutural. Dessa forma, a mecânica do dano é uma teoria interessante para modelar a perda de rigidez no concreto, pois quantifica a intensidade da degradação do material à medida que o carregamento é aplicado. Foi adotado o modelo de dano de Mazars [18], no qual o dano é causado somente pela presença de alongamentos provenientes de deformações de tração. O dano é representado localmente por uma variável escalar D que pode variar de 0 a 1, sendo zero a representação da integridade completa do material e a unidade o estado de deterioração total do mesmo. O critério para a verificação se há ou não danificação em um determinado ponto do material é definido pela equação (2):

$$f(\tilde{\epsilon}, D) = \tilde{\epsilon} - \hat{S}(D) \leq 0 \tag{2}$$

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{(\epsilon_1)_+^2 + (\epsilon_2)_+^2 + (\epsilon_3)_+^2} \tag{3}$$

onde: $\tilde{\epsilon}$ é uma medida de deformação equivalente que representa o estado de alongamento; $\hat{S}(D)$ é a deformação equivalente atualizada em função do dano; $(\epsilon_i)_+$ representa as componentes positivas do tensor de deformações principais.

Figura 2 - Comportamento não-linear do aço



A variável de dano é obtida em função do estado de deformação de cada ponto, bem como de parâmetros internos calibrados a partir de curvas tensão × deformação à tração e à compressão obtidas em ensaios de corpos-de-prova de concreto (Sanches Jr e Venturni [13], Nogueira [19]). Com isso, as tensões normal e de cisalhamento são obtidas pela lei de Hooke tradicional ponderada pela variável de dano de acordo com:

$$\underline{\dot{\sigma}} = (1 - D) \underline{\underline{D}}_0 \cdot \underline{\dot{\epsilon}} \tag{4}$$

onde: $\underline{\sigma}$ e $\underline{\epsilon}$ são, respectivamente, os tensores de segunda ordem de tensão e de deformação no ponto de integração; D é a variável de dano; $\underline{\underline{D}}_0$ é o tensor de quarta ordem de propriedades elásticas do material. Detalhes sobre mecânica do dano e suas formulações podem ser encontrados em Kachanov [20], Lemaitre e Chaboche [21], Botta [22], Pituba [23], Paula [24], Álvares [25], Araújo [26] e Nogueira [19].

2.3 Não-linearidade física para o aço

O comportamento não-linear do aço é definido pela sua plastificação observada a partir de intensidades de tensão superiores ao seu limite de escoamento. Surgem movimentos entre os cristais do material sem que haja perda de coesão ou ruptura interna, conferindo-lhe não mais comportamento elástico-linear. Dessa forma, a teoria da plasticidade torna-se apropriada para tratar o material aço. Detalhes sobre as formulações podem ser encontrados em Owen e Hinton [27] e Proença [28]. O modelo utilizado neste trabalho considera o aço como um material elasto-plástico com encruamento isotrópico positivo com lei constitutiva bi-linear, conforme figura 2. O critério de plastificação pode ser escrito da seguinte forma:

$$f^{i+1} = \sigma^{i+1} - (\sigma_y + K\alpha^{i+1}) \leq 0 \tag{5}$$

Assim, a tensão na armadura é calculada de acordo com a seguinte relação:

$$\begin{aligned} f^{i+1} < 0 &\rightarrow \dot{\sigma}^{i+1} = E\dot{\epsilon}^{i+1} \\ f^{i+1} \geq 0 &\rightarrow \dot{\sigma}^{i+1} = E_a\dot{\epsilon}^{i+1} \end{aligned} \tag{6}$$

onde: E_{corr} é o módulo de elasticidade do aço corrigido dado por $E_{corr} = EK/(E + K)$; σ^{i+1} é a tensão no aço na próxima iteração; σ_y é a tensão de escoamento do aço; K é o módulo plástico de encruamento isotrópico positivo; α^{i+1} é uma medida da deformação plástica atualizada a cada iteração; E é o módulo de elasticidade inicial do aço; ϵ^{i+1} é a deformação total.

2.4 Contribuição da armadura transversal (V_{sw})

A armadura transversal começa a ser efetivamente solicitada após

o início da fissuração do concreto, que por sua vez, é proveniente da evolução do dano (Belarbi e Hsu [29]). Em função disso, o modelo proposto para simular a presença da armadura transversal está diretamente associado ao conceito de dano do concreto. Assim, o critério para que os estribos sejam solicitados é definido pelo próprio critério de dano estabelecido pela equação (2). Admite-se que após o início da danificação, o tensor de deformações principais seja decomposto em uma parcela elástica e e outra parcela dissipada pelo dano d :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^d \tag{7}$$

Estendendo o mesmo princípio para o tensor de tensões, pode-se escrever:

$$\underline{\sigma} = (1 - D)\underline{D}_0 \cdot \underline{\varepsilon} \rightarrow \underline{\sigma} = \underline{D}_0 \cdot \underline{\varepsilon} - D\underline{D}_0 \cdot \underline{\varepsilon} \tag{8}$$

$$\underline{\sigma}^d = D\underline{D}_0 \cdot \underline{\varepsilon} \rightarrow \underline{\varepsilon}^d = D\underline{\varepsilon} \tag{9}$$

Dessa forma, a equação (9) fornece a parcela de deformação, ε^d , que deve ser absorvida pela armadura transversal, ao passo que a parcela não-dissipada é absorvida pelo concreto. O modelo de dano define, portanto, a contribuição do concreto na resistência à força cortante, e transfere parte da parcela dissipada pela perda de rigidez proveniente da fissuração para a armadura transversal. No entanto, essa parcela de deformação dissipada é definida para cada ponto de integração ao longo da seção transversal dos ele-

mentos finitos e segue a orientação do plano definido pela direção principal de tração. Como os estribos são posicionados na vertical é necessário obter as componentes verticais dessa deformação. A figura 3 ilustra o procedimento adotado e a equação (10) apresenta o máximo valor final rotacionado da deformação dos estribos.

$$\varepsilon_{sw} = \max[\varepsilon_1 D \text{sen}(\alpha)] \tag{10}$$

onde: ε_1 é a deformação principal; D é o valor do dano; α é a direção principal de tração. Todas essas grandezas definidas em cada ponto de integração ao longo da altura da seção transversal. Após a determinação da deformação na armadura transversal, a força transmitida para cada estribo é dada pelo produto $\sigma_{sw} A_{sw}$, que segundo a analogia de treliça de Ritter-Mörsch, pode ser considerada para uma faixa de largura igual à altura útil da seção transversal. Assim, define-se a parcela de força cortante transferida para a armadura transversal conforme:

$$V_{sw} = \sigma_{sw} \rho_{sw} b_w d \tag{11}$$

onde: ρ_{sw} é a taxa de armadura transversal da seção do elemento definida por $A_{sw}/s \cdot b_w$; s é o espaçamento entre os estribos;

b_w é a largura da seção transversal; d é a altura útil da seção transversal; σ_{sw} é a tensão nos estribos obtida pelo modelo elasto-plástico definido no item 2.3.

2.5 Efeito de pino (V_d)

As barras que compõem a armadura longitudinal contribuem na resistência à força cortante através do mecanismo complementar

Figura 3 – Esquema para obtenção da deformação vertical da armadura transversal

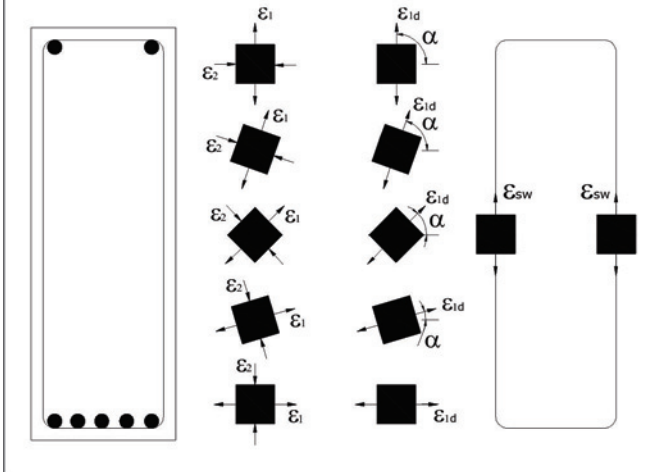


Figura 4 – Esquema de manifestação do efeito de pino

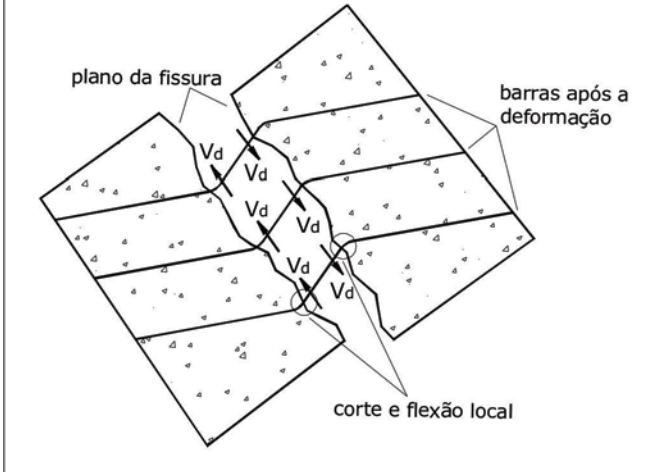
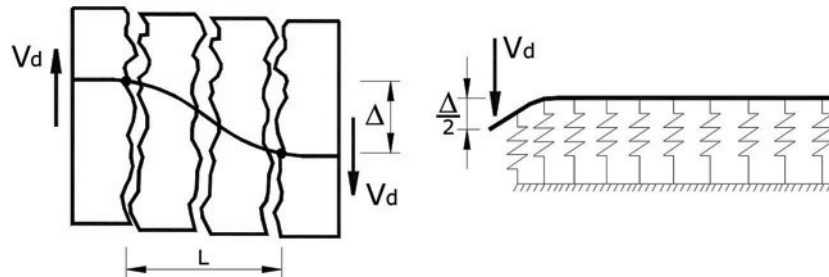


Figura 5 – Hipótese de viga sobre base elástica adotada para simular o efeito de pino



conhecido como efeito de pino. Trata-se de uma força de reação proveniente da tentativa de corte e flexão local das barras da armadura, quando estas são interceptadas por uma fissura, conforme observado na figura 4. A hipótese de viga sobre base elástica é adotada para formular o efeito de pino, onde as barras da armadura longitudinal são consideradas como vigas apoiadas sobre uma base deformável de concreto, conforme ilustrado na figura 5. Assim, a força de pino pode ser escrita como:

$$V_d = K_d \Delta \quad (12)$$

onde: K_d é a rigidez da base; Δ é o deslocamento de pino sofrido pela armadura. O comprimento L , ilustrado na figura 5, representa o quanto da barra está sujeita ao deslocamento de pino Δ , podendo ser determinado pela relação π/λ . O parâmetro λ representa a rigidez relativa da fundação definida pelo cobrimento do concreto de acordo com:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k_c \phi_s}{4E_s I_s}} \quad (13)$$

onde: k_c é o módulo de fundação para o cobrimento de concreto; ϕ_s é o diâmetro da barra equivalente correspondente à área total de uma camada de armadura; E_s é o módulo de elasticidade do aço; I_s corresponde ao momento de inércia da barra, que no caso de barras circulares é dado por $\pi\phi_s^4/64$. Soroushian et al. [30] propuseram, a partir de ensaios experimentais, uma expressão para o valor do módulo de fundação do cobrimento de concreto:

$$k_c = \frac{127c_1\sqrt{f_c}}{\sqrt[3]{\phi_s^2}} \quad (14)$$

onde: f_c é a resistência à compressão do concreto dada em N/mm²; c_1 é um coeficiente que varia de 0,6 a 1,0. Assim, o desloca-

mento de pino pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\Delta = DL \left[\epsilon_1 \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha) + \gamma_{XY} \cos^2(\alpha) \right] \quad (15)$$

onde: α é a direção principal de tração definida com a horizontal; γ_{XY} é o valor da distorção em cada ponto de integração.

O valor da rigidez de pino em função da área da camada de armadura fica então definida por:

$$K_d = \frac{4A_s}{\pi\phi_s^2} E_s I_s \lambda^3 \quad (16)$$

Após o cálculo da rigidez de cada camada de armadura, são obtidos os valores das tensões provenientes do efeito de pino para cada ponto de integração ao longo da seção transversal dos elementos.

$$\tau_d = \begin{cases} \frac{4\rho_s E_s I_s \lambda^3 \Delta}{\pi\phi_s^2} \rightarrow \sigma_c \leq f_c \text{ and } \sigma_s \leq f_s \\ \frac{1,27\rho_s \phi_s^2 \sqrt{f_c f_s}}{A_s} \rightarrow \sigma_c > f_c \text{ or } \sigma_s > f_s \end{cases} \quad (17)$$

onde: ρ_s e A_s são, respectivamente, a taxa de armadura longitudinal e a área total de armadura longitudinal ao longo da seção transversal de cada elemento finito; f_s é a tensão de escoamento do aço; σ_s e σ_c são, respectivamente, as tensões atuantes na armadura e no concreto.

Caso seja atingida a resistência à compressão do concreto ou a tensão de escoamento do aço de uma determinada camada de armadura, o efeito de pino é limitado ao valor dado pela segunda linha da equação (17). A partir dos valores da tensão de pino τ_d para cada ponto de integração ao longo da altura, integra-se ao longo do elemento e obtém-se o valor da força cortante resultante correspondente à contribuição do efeito de pino para cada ele-

mento finito. À medida que a danificação vai aumentando sobre os pontos de integração, estes vão aumentando sua contribuição no efeito de pino, de modo que ao final do processo de carregamento, toda a força de pino compatível com o estado de deformação é mobilizada.

2.6 Resolução do problema não-linear

A técnica de Newton-Raphson foi utilizada neste trabalho, a partir de um processo incremental-iterativo com matriz de rigidez tangente. Os esforços internos são calculados fazendo-se a integração das tensões ao longo dos elementos finitos, dadas pelos respectivos modelos discutidos nas seções anteriores conforme:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_c dA + \sum_{i=1}^{cam} (\sigma_s A_s)_i \\
 V &= \int_A \tau_c dA + \int_A \tau_{d,\alpha} dA + \sigma_{sw} \rho_{sw} b_w d \\
 M &= \int_A \sigma_c y dA + \sum_{i=1}^{cam} (\sigma_s A_s y)_i
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

onde: $\int_A \tau_{d,\alpha} dA$ e $\sigma_{sw} \rho_{sw} b_w d$ são, respectivamente, as parcelas resistentes do efeito de pino e da armadura transversal; y é a distância do ponto de integração ou da camada de armadura longitudinal até o centro de gravidade da seção transversal; cam é o número de camadas de armadura na seção transversal; σ_c e τ_c são, respectivamente, as tensões normal e de cisalhamento no concreto já corrigidas pelo modelo de dano. O método de integração utilizado é o de Gauss-Lobatto (Nogueira [19]), no qual o intervalo é dividido em vários pontos de integração, incluindo-se também as extremidades desse intervalo e seu ponto médio. A figura 6 ilustra o processo de integração numérica. Assim, a correção para se considerar os efeitos de pino e da armadura transversal é introduzida no vetor de forças nodais, a partir dos valores de força cortante calculados pelos modelos. Caso a força cortante resistente da seção, dada pela equação (18), seja menor do que a força

cortante aplicada, o resíduo obtido pela diferença entre ambas deve ser reaplicado na estrutura no próprio processo iterativo.

3. Resultados e discussões

3.1 Exemplo 1

Esta viga foi ensaiada no Laboratório de Estruturas da EESC-USP. A seção transversal do tipo "I" foi aproximada por seções retangulares equivalentes com altura sempre fixa de 30,0cm como na seção real (SR). No primeiro caso, calculou-se a base mantendo-se a inércia da seção constante (BI) e, no segundo caso, a área constante (BA). As características geométricas da seção transversal real e das aproximações, bem como a geometria da viga e o carregamento aplicado estão mostrados na figura 7. Os parâmetros utilizados na análise foram: módulo de elasticidade do concreto 29632MPa; coeficiente de Poisson do concreto 0,2; tensão de escoamento do aço 500MPa; módulo de elasticidade do aço 177890MPa; módulo plástico do aço 17789MPa; cobrimento da armadura longitudinal 1cm; passos de carga 12; tolerância em forças e em deslocamentos 10^{-4} ; pontos de Gauss na altura 20; pontos de Gauss no comprimento 6. Os parâmetros adotados para o modelo de dano de Mazars foram: $\epsilon_{d0} = 0,000065$; $A_T = 0,914$; $B_T = 10390$; $A_C = 0,975$; $B_C = 1246$. A viga foi discretizada em 30 elementos finitos de mesmo comprimento. A figura 8 mostra a trajetória de equilíbrio do ponto localizado no meio do vão. Como a flexão é a solicitação preponderante neste problema, comparada com a curva experimental, a resposta obtida com o momento de inércia constante (BI) foi a mais coerente. A figura 9 ilustra a evolução da deformação no estribo da seção AA. Verificou-se novamente que a resposta obtida com a aproximação de inércia constante (BI) mostrou-se melhor do que a resposta dada pela área constante (BA). No ensaio, a armadura transversal começou a ser solicitada efetivamente a partir da carga de 30kN. O modelo mecânico com aproximação do tipo BI apresentou início de solicitação significativa dos estribos a partir de 30kN, o que permite concluir que o critério que considera o início da contribuição da armadura transversal a partir do modelo de dano para o concreto está bem formulado.

3.2 Exemplo 2

A estrutura analisada neste exemplo é definida por uma viga bi-engastada, submetida a quatro forças concentradas, conforme

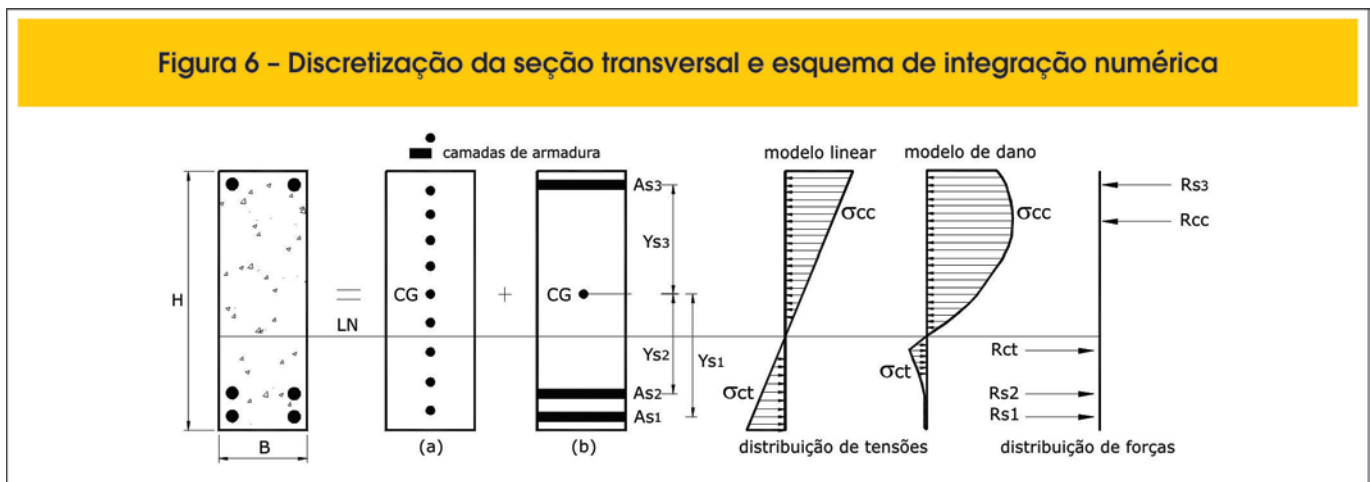
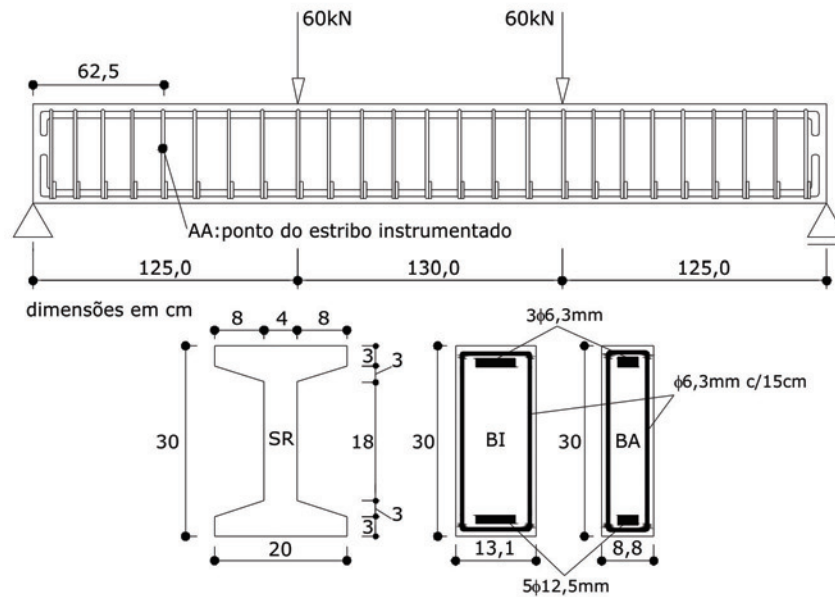


Figura 6 - Discretização da seção transversal e esquema de integração numérica

Figura 7 - Geometria, dimensões e carregamento da viga analisada



ilustra a figura 10. Esta viga foi analisada por Neves [31], que considerou malha de 10 elementos finitos, modelo de dano de Mazars para o concreto e parcela de força cortante transmitida aos estribos exatamente igual à parcela não absorvida pelo concreto, isto é, $V_{sw} = V_{elástico} - V_{concreto}$, o que caracteriza comportamento elástico-linear para os estribos e ausência de resíduos em força cortante. Trata-se de um exemplo fictício com resultados apenas numéricos. Os parâmetros utilizados nesta análise foram: módulo de elasticidade do concreto 29200MPa; coeficiente de Poisson do concreto 0,2; tensão de escoamento

do aço 500MPa; módulo de elasticidade do aço 196000MPa; módulo plástico do aço 19600MPa; passos de carga 12; tolerância em forças e em deslocamentos 10^{-4} ; pontos de Gauss na altura 22; pontos de Gauss no comprimento 7. Os parâmetros adotados para o modelo de dano de Mazars foram: $\epsilon_{d0} = 0,000065$; $A_T = 0,910$; $B_T = 10390$; $A_C = 0,977$; $B_C = 1270$. As análises foram realizadas considerando-se três modelos mecânicos: Euler-Bernoulli (B), Timoshenko (T), Timoshenko completo, isto é, com armadura transversal e efeito de pino (TSD). A viga foi analisada para cinco malhas distintas com as seguintes discretizações: 10,

Figura 8 - Trajetória de equilíbrio do ponto localizado no meio do vão

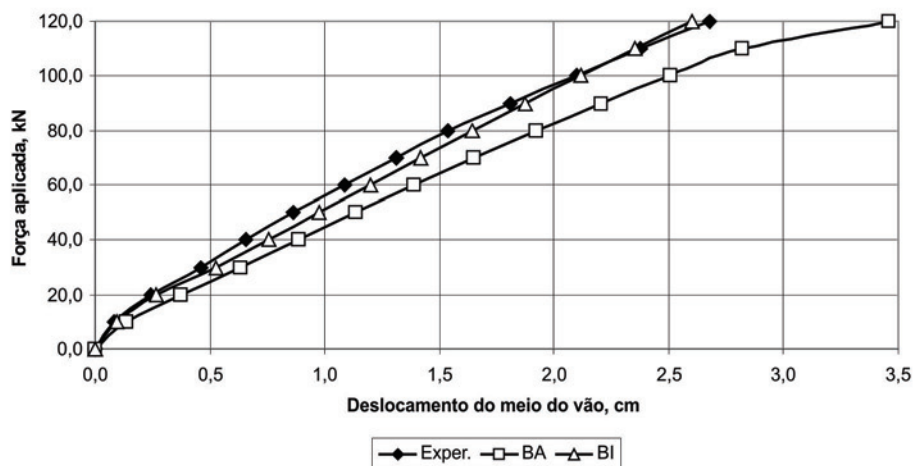


Figura 9 - Deformação no estribo da seção AA

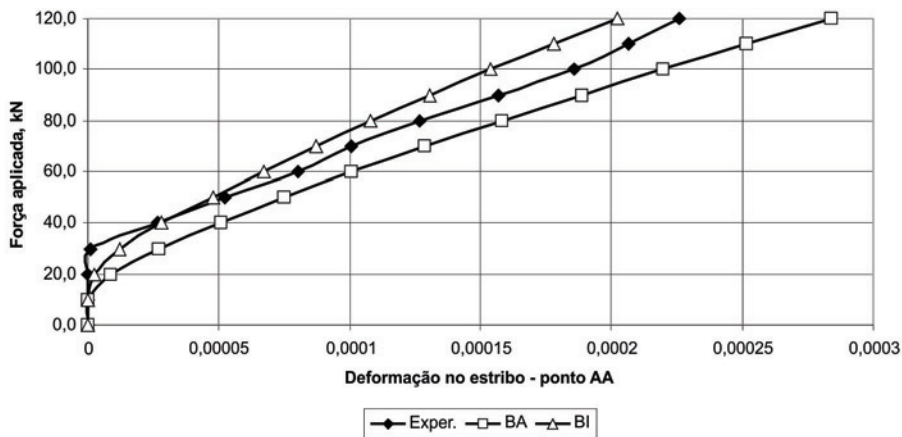


Figura 10 - Geometria, dimensões e carregamento da viga analisada

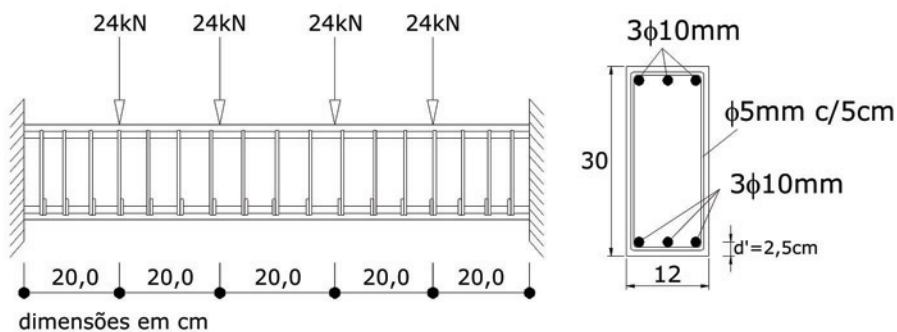


Figura 11 - Análise de convergência para os modelos B, T e TSD

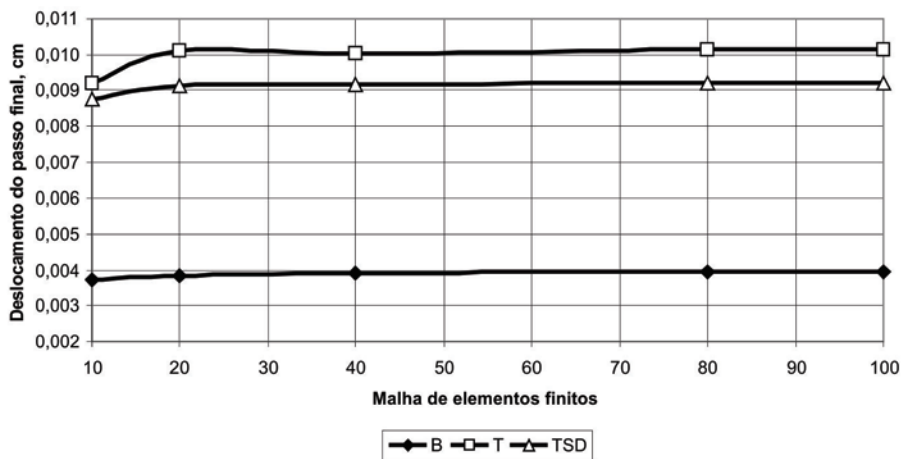


Figura 12 – Trajetória de equilíbrio do nó do meio do vão: malha com 80 elementos finitos

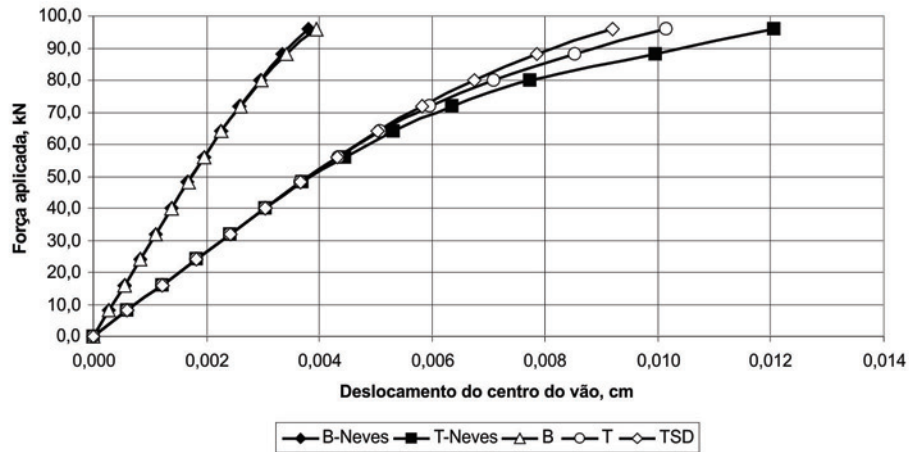
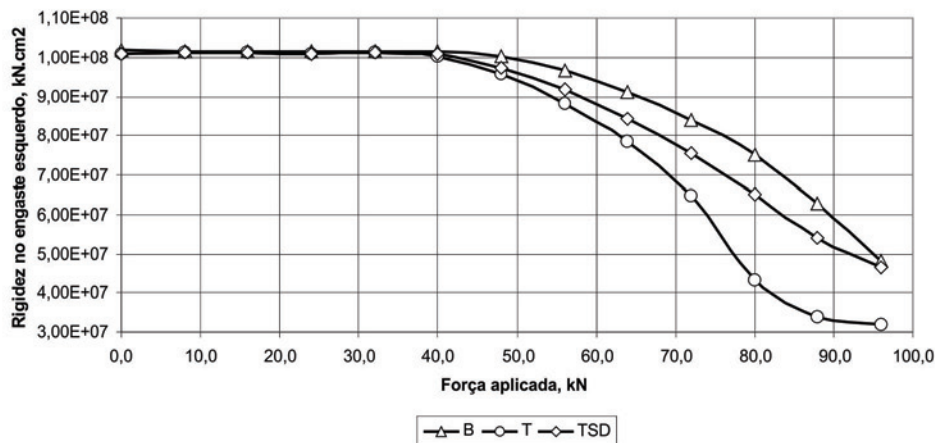


Figura 13 – Evolução da rigidez na seção do engaste: malha com 80 elementos finitos



20, 40, 80 e 100 elementos finitos de mesmo comprimento. A figura 11 ilustra a análise de convergência realizada, adotando-se como critério a verificação do deslocamento no meio do vão para o último passo do carregamento. A partir de 80 elementos finitos, observou-se a estabilidade numérica da resposta, sendo esta praticamente idêntica à resposta obtida com a malha de 100 elementos. Em função disso, a malha utilizada para o estudo foi a de 80 elementos finitos. A figura 12 apresenta a trajetória de equilíbrio do nó localizado no meio do vão da estrutura. É possível observar que existe uma diferença significativa entre as respostas obtidas com os modelos T e TSD comparadas com a resposta dada pelo modelo B. Isto ocorreu em função da relação altura/comprimento de 1,0/3,3 que já indica influência significativa das deformações por cisalhamento. Nos passos finais de carregamento, foram verificadas diferenças importantes entre os modelos T e TSD, provenientes das contribuições do efeito

de pino e da armadura transversal. Por ser uma estrutura hiperestática, com redistribuição de esforços, a influência dos mecanismos complementares foi ainda mais significativa. Na figura 13 pode ser observada a perda de rigidez da seção transversal do engaste esquerdo em função do carregamento total aplicado. Diferença notável foi observada quando foram incorporadas as contribuições da armadura transversal e do efeito de pino, pois proporcionaram menos perda de rigidez, uma vez que parte da parcela perdida pela danificação foi absorvida por esses mecanismos de resistência. Outro dado importante a ser discutido é a variação da rigidez em função da discretização adotada, conforme figuras 14 e 15. Malhas menos refinadas, em estruturas hiperestáticas, tendem a não representar adequadamente essas perdas de rigidez, principalmente quando são considerados os efeitos do cisalhamento. Os resultados das malhas de 80 e 100 elementos finitos resultaram muito próximos, embasando mais

uma vez a escolha da discretização. A maior redistribuição observada no modelo T comparada ao modelo B é proveniente do estado bi-axial de deformações existente pela consideração das distorções no comportamento da viga. No entanto, o modelo TSD permitiu que a estrutura absorvesse parte da parcela dissipada, diminuindo, assim, a perda de rigidez global da estrutura.

4. Conclusões

O trabalho apresentou um modelo mecânico baseado no método dos elementos finitos unidimensionais que incorpora em sua formulação a resistência da armadura transversal e o efeito de pino, a partir dos conceitos da mecânica do dano. A principal vantagem do modelo consiste em adaptar os mecanismos de resistência ao cisalhamento para um elemento finito de barra, sem a necessidade de análises bi-dimensionais. O critério para início da

solicitação dos estribos mostrou-se coerente com os resultados experimentais, conforme observado no exemplo 1. Outro aspecto interessante verificou a contribuição dos mecanismos de resistência ao cisalhamento com a relação altura/comprimento das vigas. Quanto maior a relação altura/comprimento da viga, maior é a importância do cisalhamento na trajetória de equilíbrio e maior é o efeito dos modelos de resistência apresentados. Com isso, foi possível perceber as diferenças significativas ao se considerar esses modelos, resultando em perdas menores de rigidez obtidas com os modelos numéricos do tipo TSD. Com relação ao tempo de processamento do modelo TSD, o maior tempo gasto ocorreu para a viga do exemplo 2 com malha de 100 elementos finitos, sendo da ordem de 8,7 minutos em um computador com dois processadores de 2.0GHz e 3GB de memória. Todas as demais análises apresentaram tempo de processamento inferior a esse valor.

Figura 14 – Rigidez na seção do engaste x discretização: modelo T

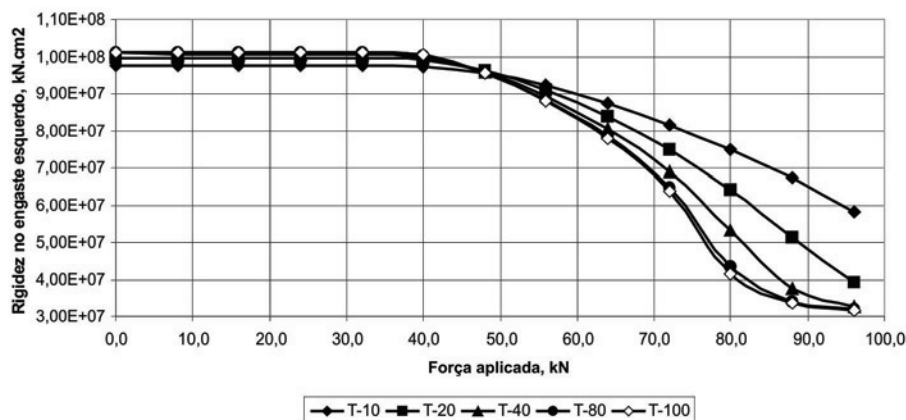
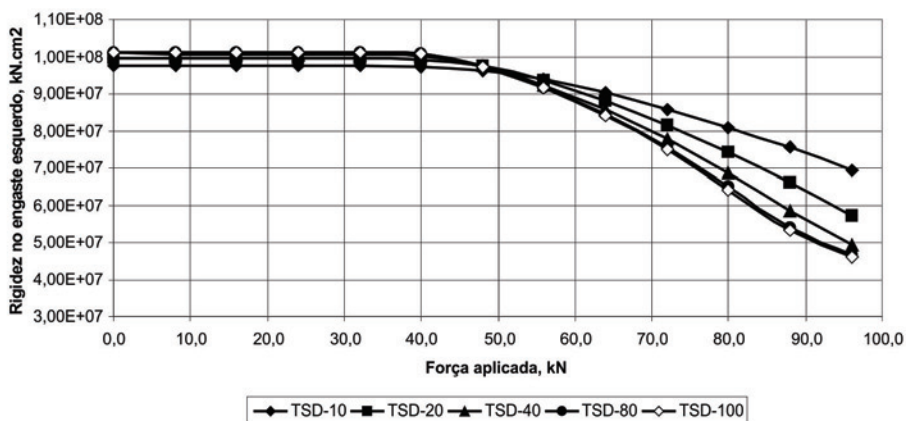


Figura 15 – Rigidez na seção do engaste x discretização: modelo TSD



5. Agradecimentos

Ao inestimável e saudoso professor Wilson Sergio Venturini por tudo que fez. À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo suporte financeiro.

6. Referências bibliográficas

- [01] KREFELD, W.J.; THURSTON, C.W. Studies of the shear and diagonal tension strength of simply supported reinforced concrete beams. *ACI Journal*, v.63, n.4, 1966; p.451-476.
- [02] DEI POLI, S.; DI PRISCO, M.; GAMBAROVA, P.G. Shear response, deformations and subgrade stiffness of a dowel bar embedded in concrete. *ACI Structural Journal*, v.89, n.6, November-December, 1992; p.665-675.
- [03] GERGELY, P. Splitting cracks along the main reinforcement in concrete members. Dept. of Structural Engineering, Report, Cornell University, 1969.
- [04] DULACSKA, H. Dowel action of reinforcement crossing cracks in concrete. *ACI Journal*, Proceedings, v.69, n.12, December, 1972; p.754-757.
- [05] JIMENES, R.; WRITE, R.N.; GERGELY, P. Bond and dowel capacities of reinforced concrete. *ACI Journal*, January, 1979; p.73-91.
- [06] WALRAVEN, J.C. Fundamental analysis of aggregate interlock. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.107, n.ST11, November, 1981; p.2245-2270.
- [07] LAIBLE, J.P.; WHITE, R.N.; GERGELY, P. Experimental investigation of seismic shear transfer across cracks in concrete nuclear containment vessels. Reinforced concrete structures in seismic zones. Detroit, American Concrete Institute, ACI Special Publication SP-53, 1977; p.203-206.
- [08] BAZANT, Z.P.; GAMBAROVA, P.G. Rough cracks in reinforced concrete. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.106, n.4, April, 1980; p.819-842.
- [09] MILLARD, S.G.; JOHNSON, R.P. Shear transfer across cracks in reinforced concrete due to aggregate interlock and to dowel action. *Magazine of Concrete Research*, v.36, n.126, 1984; p.9-21.
- [10] MARTÍN-PEREZ, B.; PANTAZOPOULOU, S.J. Effect of bond, aggregate interlock, and dowel action on the shear strength degradation of reinforced concrete. *Engineering Structures*, v.23, 2001; p.214-227.
- [11] HE, X.G.; KWAN, K.H. Modelling dowel action of reinforcement bars for finite element analysis of concrete structures. *Computers and Structures*, v.79, 2001; p.595-604.
- [12] EL-ARISS, B. Behavior of beams with dowel action. *Engineering Structures*, v.29, 2007; p.899-903.
- [13] SANCHES JR, F.; VENTURINI, W.S. Damage modelling of reinforced concrete beams. *Advances in Engineering Software*, v.38, 2007; p.538-546.
- [14] OLIVER, J.; LINERO, D.L.; HUESPE, A.E.; MANZOLI, O.L. Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.197, 2008; p.332-348.
- [15] NICKEL, R.E.; SECOR, G.A. Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.5, 1972; p.243-253.
- [16] PRATHAP, G.; BHASHYAM, G.R. Reduced integration and the shear-flexible beam element. *J. Num. Meth. Eng.*, v.18, 1982; p.195-210.
- [17] HEYLIGER, P.R.; REDDY, J.N. A higher order beam finite element for bending and vibration problems. *Journal of sound and vibration*, v.126, n.2, 1988; p.309-326.
- [18] MAZARS, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure, Paris, 1984, Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6.
- [19] NOGUEIRA, C.G. Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado. São Carlos, 2010, Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 345 p.
- [20] KACHANOV, L.M. Time of rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk, USSR* (em russo), n.8; 1958, p.26-31.
- [21] LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.C. *Mécanique des matériaux solides*. Paris, Dunod-Bordas; 1985.
- [22] BOTTA, A.S. Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas reticuladas considerando a mecânica do dano no contínuo para a modelagem do concreto armado. São Carlos, 1998, Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 98 p.
- [23] PITUBA, J.J.C. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto, fundamentados na mecânica do dano contínuo. São Carlos, 1998, Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 130 p.
- [24] PAULA, C.F. Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas. São Carlos, 2001, Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 128 p.
- [25] ÁLVARES, M.S. Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos. São Carlos, 1993, Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 123 p.
- [26] ARAÚJO, F.A. Formulação de um modelo de dissipação concentrada para análise não-linear de estruturas reticuladas planas em concreto armado. São Carlos, 2007, Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 232 p.

- [27] OWEN, D.R.J.; HILTON, H. Finite elements in plasticity. Swansea, U.K, Pineridge Press; 1980.
- [28] PROENÇA, S.P.B. Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições. São Carlos, 1988, Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 330 p.
- [29] BELARBI, A.; HSU, T.T.C. Stirrup stresses in reinforced concrete beams. ACI Structural Journal, September-October, 1990; p.530-538.
- [30] SOROUSHIAN, P.; OBASEKI, K.; ROJAS, M.C. Bearing strength and stiffness of concrete under reinforcing bars. ACI Materials Journal, v.84, n.3, May-June, 1987; p.179-184.
- [31] NEVES, R.A. Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de pisos de edifícios considerando-se a influência das tensões cisalhantes. São Carlos, 2000, Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 132 p.